

# Modelado experimental de un Motor DC real

Félix Monasterio-Huelin y Álvaro Gutiérrez

3 de abril de 2016

## Índice

<b>Índice</b>	<b>1</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción al modelado experimental de un motor DC</b>	<b>3</b>
<b>2. Algoritmo para la obtención experimental del modelo simplificado <math>(K, p)</math> del motor</b>	<b>4</b>
2.1. <b>Primera Fase:</b> Obtención del valor medio de velocidades angulares del régimen permanente . . . . .	7
2.2. <b>Segunda Fase:</b> Cálculo del polo medio de varianza mínima . . . . .	7
2.2.1. Creación de intervalos . . . . .	8
2.3. <b>Tercera Fase:</b> cálculo de $K$ y de la tensión de entrada equivalente . . . . .	10
2.3.1. Propuesta para la estimación de los parámetros $p$ y $K$ del motor supuestos en la Tercera Fase . . . . .	11
2.4. <b>Cuarta Fase:</b> Identificación de la función no lineal del modelo del motor mediante la técnica de interpolación polinómica . . . . .	12
<b>3. Modelado de un motor real</b>	<b>13</b>
<b>4. Ejemplo de diseño de un controlador no lineal de posición angular de un motor DC mediante linealización por inversión de la entrada equivalente</b>	<b>18</b>
<b>A. Obtención analítica del polo del motor con una entrada escalón bajo condiciones iniciales nulas</b>	<b>22</b>
<b>B. Obtención analítica del polo del motor con una entrada nula bajo condiciones iniciales no nulas</b>	<b>23</b>
<b>C. Obtención analítica del polo del motor con una señal de entrada cuadrada</b>	<b>24</b>
<b>D. Discretización del polo del motor obtenido con una entrada escalón bajo condiciones iniciales nulas</b>	<b>26</b>
<b>E. Discretización del polo del motor obtenido con una entrada nula bajo condiciones iniciales no nulas</b>	<b>26</b>
<b>F. Discretización del polo del motor obtenido con una señal de entrada cuadrada</b>	<b>27</b>
<b>G. Demostración de la invertibilidad de la matriz <math>\mathcal{V}</math></b>	<b>28</b>
<b>Índice de Figuras</b>	
1.1. Esquema general para el modelado de un motor DC . . . . .	3
1.2. Modelo no lineal de un motor DC . . . . .	4

1.3. Sistema de control realimentado no lineal con controlador P-D . . . . .	4
2.1. Modelo no lineal de motor DC . . . . .	4
2.2. Número de pulsos en el eje de un motor DC real . . . . .	5
2.3. Velocidad angular en el eje de un motor DC real . . . . .	5
3.1. Velocidad angular en el eje de un motor DC real . . . . .	14
3.2. Varianza y polo medio $pS_j$ en cada intervalo de tiempo . . . . .	14
3.3. Valores de p y K obtenidos en las tres primeras fases . . . . .	15
3.4. Respuestas del motor (explicación en el texto) . . . . .	16
3.5. Polinomio de interpolación impar de grado 17 . . . . .	16
3.6. Polinomio de interpolación impar extendido de grado 23 . . . . .	17
4.1. Sistema de control realimentado no lineal con controlador P-D . . . . .	18
4.2. Polinomio de interpolación $f^{-1}$ . . . . .	19
4.3. Polinomio de interpolación $f^{-1}$ extendido . . . . .	20

# 1. Introducción al modelado experimental de un motor DC

Los motores DC suelen tener un comportamiento lineal en un rango predefinido de tensiones de entrada. Sin embargo, a bajas velocidades angulares la fricción produce no linealidades, además de que el motor sufre perturbaciones a su entrada y ruido a su salida, normalmente debidas, las primeras al efecto de la carga y la segunda al ruido en la medida de los sensores. También sufre el motor variaciones no lineales cuando se utiliza de forma continua, debido a efectos térmicos produciendo variaciones en la resistencia de la bobina. A tensiones elevadas puede haber una desmagnetización del hierro, lo que supone variaciones en las constantes del motor.

Por otro lado, si se realiza un control digital aparecen errores debidos a la longitud de palabra finita, es decir, errores en los conversores A/D (sensor de posición angular, por ejemplo) y errores numéricos en el cálculo de las señales de control. Además, la conversión D/A de la señal de control y de la señal continua de entrada al motor nunca puede ser una reconstrucción exacta de una señal muestreada, ya que requeriría un filtro paso bajo ideal, el cual no es realizable físicamente. Y por último, la etapa de potencia, es decir, la electrónica que acondiciona la señal de baja potencia de un microcontrolador a la potencia eléctrica del motor, suele añadir ruido a su salida. Si se utiliza como etapa de potencia un puente en H para la generación de una señal PWM puede ocurrir que la tensión de referencia no sea suficientemente estable, debido al convertor AC/DC. Como consecuencia la tensión de entrada al motor no sería la deseada, sino que estaría afectada por un ruido difícil de modelar.

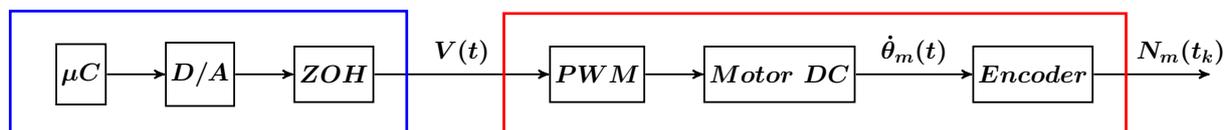


Figura 1.1: Esquema general para el modelado de un motor DC

Todos estos factores hacen difícil un modelado exacto de un motor DC. En lo que sigue llamaremos modelado del motor a lo que realmente sería un modelado del motor que incluya toda la electrónica que será utilizada en un sistema de control realimentado. En la Figura 1.1 se muestra un esquema de bloques con los elementos fundamentales de actuación de un motor DC. En ella,  $N_m(t_k)$  representa el número de pulsos medido en el instante de tiempo  $t_k$  en el eje del motor, que permitiría obtener la posición angular en radianes,

$$\theta_m(t_k) = \frac{2\pi N_m(t_k)}{q} \quad (1.1)$$

donde  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) del encoder incremental.

En este escrito simplificaremos enormemente el problema de modelado. En primer lugar, se impondrá que el modelo matemático deseado se corresponda con el de un sistema lineal de primer orden en velocidad angular, de tal manera que el objetivo se reduzca a estimar dos parámetros del motor,  $K$  y  $p$ , donde  $K/p$  sea la ganancia a bajas frecuencias y  $p$  represente el único polo de un sistema de primer orden.

Para ello se harán medidas experimentales de la salida del motor  $N_j$ , para diferentes tensiones de entrada  $V_j$ , y en dos situaciones distintas: bajo condiciones iniciales nulas y bajo condiciones iniciales no nulas. La primera de ellas utilizando una señal de entrada escalón y la segunda con una señal nula a la entrada.

En los Apéndices A y B se realiza un estudio teórico para ambas situaciones y en los Apéndices D y E, se obtiene una discretización aproximada del polo, suponiendo que las señales de entrada al motor se generan mediante un microcontrolador y que la salida de posición angular se mide con un encoder incremental situado en el eje del motor. Estos estudios tienen como finalidad obtener expresiones del polo  $p$  reduciendo al mínimo los errores numéricos debidos a la longitud de palabra finita de un microcontrolador.

En la Sección 2 se propone un algoritmo de modelado sencillo, que da lugar al modelo lineal deseado junto con un elemento no lineal de ajuste de la señal de entrada. Este elemento no lineal puede

no estar presente en el resultado del modelado si el motor se comporta de manera suficientemente lineal. Pero esto no siempre es así, como se verá en la Sección 3 con un ejemplo sobre un motor real.

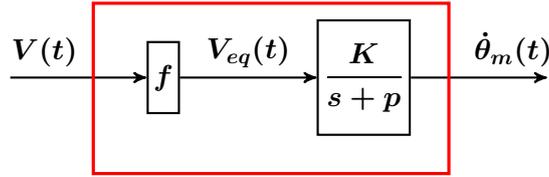


Figura 1.2: Modelo no lineal de un motor DC

En la Figura 1.2 se muestra el esquema de bloques del modelo no lineal, donde  $V(t)$  representa la señal de entrada al motor, y  $V_{eq}(t)$  la señal de entrada a la parte lineal del motor, de tal manera que  $V_{eq}(t) = f(V(t))$  siendo  $f$  la función no lineal resultante del modelado. En el algoritmo que se propone se identifica esta función no lineal  $f$  como un polinomio en  $V(t)$  realizando una interpolación polinómica de las medidas experimentales realizadas.

La idea del algoritmo de modelado es que permita diseñar controladores lineales suponiendo que el motor es lineal, y que se comporta como un sistema de primer orden en velocidad angular. Una vez hecho el diseño del controlador lineal, se implementaría introduciendo la corrección no lineal de la señal de control generada por el controlador.

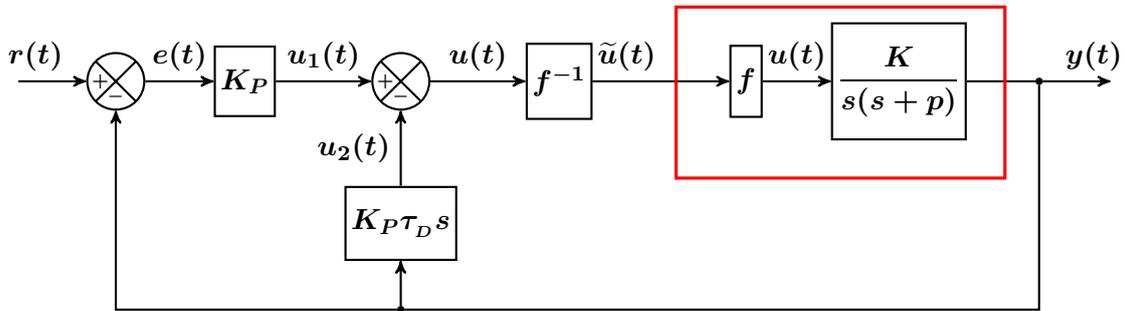


Figura 1.3: Sistema de control realimentado no lineal con controlador P-D

En la Figura 1.3 se muestra un sistema de control realimentado no lineal con un controlador P-D de posición angular del motor ( $y(t) = \theta_m(t)$ ). La parte no lineal del controlador es la inversa de la parte no lineal del motor de tal manera que, si la cancelación es exacta, el motor se comporte como si fuese lineal. O dicho de otra forma, se ha linealizado el motor mediante la función inversa de la no linealidad del motor. En la Sección 4 se explica cómo obtener  $f^{-1}$ , que satisfaga que  $\tilde{u}(t) = f^{-1}(u(t))$ , y donde  $u(t) = V_{eq}(t)$  y  $\tilde{u}(t) = V(t)$ , de acuerdo con la notación de la Figura 1.2.

## 2. Algoritmo para la obtención experimental del modelo simplificado $(K, p)$ del motor

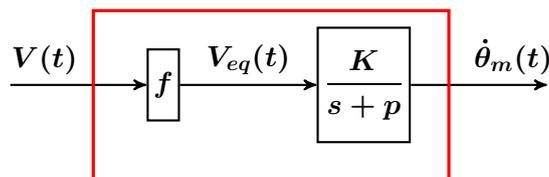


Figura 2.1: Modelo no lineal de motor DC

Se propone, en esta Sección, un algoritmo para la obtención experimental del modelo simplificado de un motor. El objetivo es obtener los parámetros únicos  $(p, K)$  de la parte lineal del modelo, y la

función no lineal  $f$ , como se muestra en la Figura 2.1.

En primer lugar, debe realizarse un conjunto de  $P * Q$  experimentos:  $P$  experimentos con una entrada escalón de la misma amplitud, y  $Q$  experimentos con valores de la entrada escalón de diferente amplitud.

Los  $P$  experimentos pueden realizarse como un único experimento con una señal de entrada cuadrada periódica, con un periodo cuya duración sea suficientemente larga como para que se haya alcanzado la velocidad angular de régimen permanente.

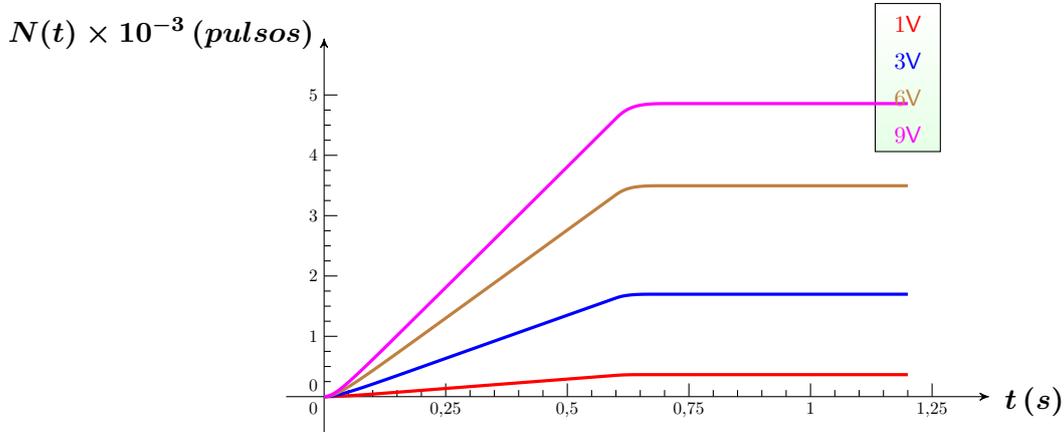


Figura 2.2: Número de pulsos en el eje de un motor DC real

Lo primero que puede hacerse es obtener una única respuesta al escalón de amplitud  $V_j$  con  $j = 1, 2, \dots, Q$ , promediando, en cada instante de tiempo, los  $P$  experimentos para cada  $V_j$ . De esta manera se realizaría un primer filtrado paso bajo de la respuesta del motor a una entrada cuadrada, suavizando el comportamiento del motor. Para poder hacer este promedio temporal se está suponiendo que todos los experimentos se han realizado con un periodo de muestreo idéntico.

En la Figura 2.2 se muestran las curvas del número de pulsos  $N_j(t)$  promediadas de un motor DC real de  $P = 10$  experimentos, para cuatro valores distintos de tensión de entrada expresados en voltios,  $V \in \{1, 3, 6, 9\}$ , obtenidos con un encoder cuya resolución es  $q = 12$ , es decir, que tiene una precisión de  $\pm 30^\circ$ , y con un periodo de muestreo  $T = 1ms$ . La señal cuadrada está formada por un escalón de amplitud  $V_j$  y de duración 0,6s, y una bajada de duración 0,6s que comienza tras finalizar el escalón de subida.

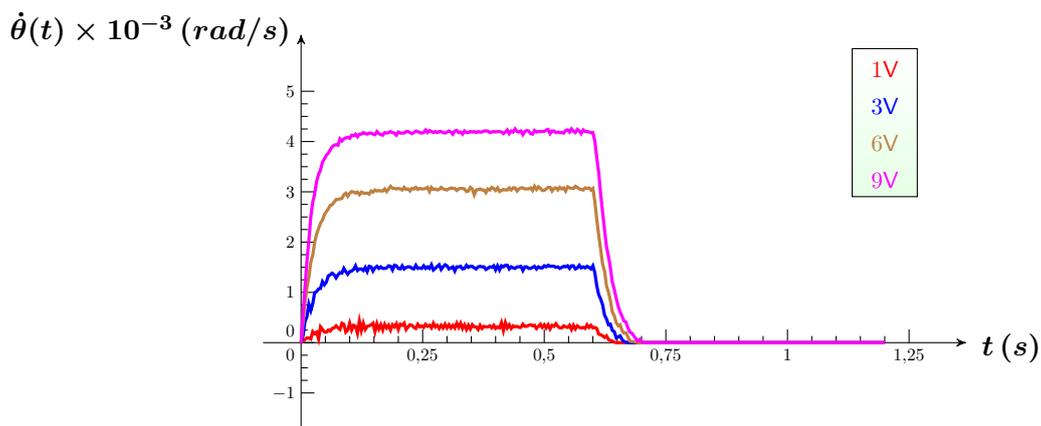


Figura 2.3: Velocidad angular en el eje de un motor DC real

En la Figura 2.3 se muestran las curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}_j(t)$  promediadas de un motor DC real para los cuatro valores de tensión de entrada de la Figura 2.2. La velocidad angular se ha obtenido utilizando la primera aproximación de Euler de la derivada,

$$\dot{\theta}_j(t_k) = \frac{2\pi (N_j(t_k) - N_j(t_{k-1}))}{qT} \quad (2.1)$$

donde  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) de un encoder incremental,  $T$  es el periodo de muestreo expresado en segundos, y  $N_j(t_k)$  es el número de pulsos obtenidos con el encoder. Puesto que las condiciones iniciales de cada uno de los  $P$  experimentos han sido nulas,  $\dot{\theta}_j(0) = 0$ .

Hecho esto, se tendrán  $Q$  ficheros de datos asociados a un conjunto de valores de entrada,

$$V \in \{V_1, V_2, \dots, V_Q\} \quad (2.2)$$

El algoritmo que se propone aquí consta de cuatro fases que se describen detalladamente en las siguientes subsecciones:

- **Primera Fase. Obtención del valor medio de velocidades angulares del régimen permanente.**

En la Subsección 2.1 se calcula con los datos experimentales un conjunto de valores medios de velocidad angular,

$$\{\bar{\theta}_1(\infty), \bar{\theta}_2(\infty), \dots, \bar{\theta}_Q(\infty)\} \quad (2.3)$$

- **Segunda Fase. Cálculo del polo medio de varianza mínima.**

En la Subsección 2.2 se calcula con los datos experimentales un conjunto de valores medios de los polos,

$$\{p_1, p_2, \dots, p_Q\} \quad (2.4)$$

- **Tercera Fase. Cálculo de  $K$  y de la tensión de entrada equivalente.**

En la Subsección 2.3 se calcula el conjunto de valores  $K_j$  a partir de los vectores 2.3 y 2.4,

$$\{K_1, K_2, \dots, K_Q\} \quad (2.5)$$

Puesto que lo que nos interesa es obtener un modelo del motor cuya parte lineal tenga los parámetros  $(K, p)$  únicos, es necesario obtener la tensión de entrada equivalente que satisfaga las relaciones de proporcionalidad de la ganancia a bajas frecuencias,

$$\frac{\bar{\theta}_j(\infty)}{V_{eq,j}} = \frac{\bar{\theta}_k(\infty)}{V_{eq,k}} \quad (2.6)$$

para cualquier  $j, k \in \{1, 2, \dots, Q\}$ .

En la Figura 2.3 puede apreciarse a simple vista que la proporción entre velocidades angulares del régimen permanente y tensiones no es exacta. Esto significa que el motor DC no se comporta de manera lineal en cuanto a la ganancia a bajas frecuencias  $K/p$ .

Se obtendría en esta fase un vector de tensiones de entrada equivalentes,

$$\{V_{eq,1}, V_{eq,2}, \dots, V_{eq,Q}\} \quad (2.7)$$

En la Subsección 2.3.1 se obtiene una expresión de  $K/p$  obtenida utilizando la técnica de optimización del error cuadrático, donde el error viene dado por  $e_j = V_{eq,j} - V_j$ . A partir de este valor se propone una fórmula para el cálculo del polo único  $p$ , y del valor único de  $K$ .

- **Cuarta Fase. Identificación de la función no lineal del modelo del motor mediante la técnica de interpolación polinómica.**

En la Subsección 2.4 se obtiene la parte no lineal  $f$  del modelo del motor DC, de tal manera que tenga la siguiente forma polinómica,

$$V_{eq}(t) = a_1 V(t) + a_3 V^3(t) + \dots + a_{2Q-1} V^{2Q-1}(t) \quad (2.8)$$

## 2.1. Primera Fase: Obtención del valor medio de velocidades angulares del régimen permanente

Sobre el experimento promedio se obtendría un valor medio de las últimas muestras de las que pueda garantizarse que el motor se encuentra en su régimen permanente.

Si se supone que la discretización del tiempo es uniforme,  $T$ , y el escalón del experimento promedio tuviese una duración  $T_f = (N_f - 1)T$ , se escogerían los valores de las últimas  $N$  muestras. Esta media sería  $\bar{\theta}(\infty)$ ,

$$\bar{\theta}(\infty) = \frac{\sum_{i=1}^N \dot{\theta}_{N_f-N+i}}{N} \quad (2.9)$$

Por lo tanto, en esta Primera Fase deberá seleccionarse un valor de  $N$  adecuado.

Esto mismo se haría para los  $Q$  valores de la entrada escalón  $V \in \{V_1, V_2, \dots, V_Q\}$ . Se obtendrá entonces, un conjunto de valores medios de velocidad angular,

$$\{\bar{\theta}_1(\infty), \bar{\theta}_2(\infty), \dots, \bar{\theta}_Q(\infty)\} \quad (2.10)$$

Si el motor se comportase linealmente, los valores  $\bar{\theta}_j(\infty)$ , con  $j = 1, 2, \dots, Q$ , serían proporcionales, en el sentido de que

$$\frac{\bar{\theta}_j(\infty)}{\bar{\theta}_k(\infty)} = \frac{V_j}{V_k} \quad (2.11)$$

para cualquier  $j, k \in \{1, 2, \dots, Q\}$ .

## 2.2. Segunda Fase: Cálculo del polo medio de varianza mínima

Mientras que para el cálculo de  $\bar{\theta}(\infty)$  se utilizan los valores finales de respuesta del motor a una entrada escalón, para el cálculo del polo deberá estudiarse el comportamiento del motor en el régimen transitorio.

Esta fase se realiza para cada uno de los  $Q$  experimentos utilizando el valor  $\bar{\theta}_j(\infty)$  obtenido en la Primera Fase. De esta forma se obtiene un vector de  $Q$  polos,

$$\{p_1, p_2, \dots, p_Q\} \quad (2.12)$$

La expresión del polo que puede utilizarse para el transitorio de subida de una señal cuadrada es la expresión dada por D.3 obtenida en el Apéndice D bajo condiciones iniciales nulas,

$$pS_j(k) = \frac{N_j(k) - N_j(k-1)}{T \left( \frac{q\bar{\theta}_j(\infty)}{2\pi} kT - N_j(k) \right)} \quad (2.13)$$

donde  $N_j(k)$  representa el número de pulsos medido en el instante de tiempo  $t_k = kT$  en el eje del motor y  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) del encoder incremental.

El estudio de todo el régimen transitorio del tramo de subida conduciría a errores debido a que el comportamiento del motor a bajas velocidades está muy condicionado por los pares de fricción que no se están considerando en el modelo matemático. Por lo tanto, debe descubrirse el intervalo de tiempo que permita obtener un valor del polo que más se ajuste a los datos experimentales.

El método que se propone para el tramo de subida utilizando la expresión 2.13, es calcular el polo medio para un conjunto de intervalos de tiempo  $[t_I, t_F]$ , cuyo instante inicial  $t_I$  y anchura  $t_F - t_I$  sean variables, y elegir el valor del polo medio cuya varianza sea la menor de las varianzas de cada intervalo seleccionado. De esta manera se obtendría  $pS_j$ . En la subsección 2.2.1 se indica un método sencillo para la creación de los intervalos.

Por otro lado, la expresión del polo que puede utilizarse para el transitorio de bajada de una señal cuadrada es la dada por la expresión de valores extremos F.6 del Apéndice F,

$$pB_j = \frac{\frac{\bar{q}\bar{\theta}_j(\infty)}{2\pi}}{N_j(k_f) - N_j(k_0)} \quad (2.14)$$

donde  $k_f T$  es cualquier instante de tiempo en el cual el motor se encuentra parado.

También puede utilizarse la expresión dada por E.2 obtenida en el Apéndice E bajo condiciones iniciales no nulas, aunque es más complicada que la de valores extremos. Sin embargo, la utilización de la expresión F.1 del Apéndice F es problemática, debido a que exige que  $\dot{\theta}_j(\infty)t_0 = \theta(\infty)$ , lo cual puede no ocurrir en un estudio experimental, dando lugar a errores innecesarios.

Una vez calculados  $pS_j$  y  $pB_j$  se obtendrá un único valor  $p_j$  como una combinación lineal de los anteriores,

$$p_j = \alpha pS_j + (1 - \alpha)pB_j \quad (2.15)$$

donde  $\alpha \in [0, 1]$ .

### 2.2.1. Creación de intervalos

El método que se propone para el tramo de subida utilizando la expresión 2.13, es calcular el polo medio para un conjunto de intervalos de tiempo,

$$[t_I, t_F] \quad (2.16)$$

cuyo instante inicial  $t_I$  y anchura  $t_F - t_I$  sean variables, y elegir el valor del polo medio cuya varianza sea la menor de las varianzas de cada intervalo seleccionado.

Para que este método tenga sentido debe elegirse una anchura de intervalo mínima  $\Delta t$ , es decir que  $t_F \geq t_I + \Delta t$ .

Una forma sencilla de crear los intervalos consiste en elegir cuatro valores,  $t_I$  mínimo y máximo y  $t_F$  mínimo y máximo. Es decir,

$$t_I \in [t_{Im}, t_{IM}] \quad (2.17a)$$

$$t_F \in [t_{Fm}, t_{FM}] \quad (2.17b)$$

Si se supone que la discretización del tiempo es uniforme, el algoritmo puede programarse utilizando dos bucles para la creación del intervalo  $[t_I, t_F]$ , y otro bucle más para el cálculo del polo medio y de la varianza asociada a este intervalo. Conviene, en este caso, expresar los intervalos en función de un índice temporal tal que  $t = kT$ , entonces el intervalo será  $[k_I, k_F]$ .

Una posible selección de  $k_{FM}$  puede ser asignándole el valor  $N_r = N_f - N$  utilizado en la Primera Fase para calcular  $\bar{\theta}(\infty)$ . Puede reducirse el número de intervalos que se inspeccionarán si se hace la siguiente elección:

$$k_{IM} = N_r - n\Delta k \quad (2.18a)$$

$$k_{Fm} = k_I + \Delta k \quad (2.18b)$$

$$k_{FM} = k_I + n\Delta k \quad (2.18c)$$

donde  $n$  es un número entero positivo y  $k_I \in \{k_{Im}, k_{Im} + 1, \dots, k_{IM}\}$ .

El número de intervalos inspeccionados será

$$N_{Interv} = ((n - 1)\Delta k + 1)(N_r - k_{Im} - n\Delta k + 1) \quad (2.19)$$

Esta expresión se obtiene del siguiente razonamiento. El primer bucle, el de  $k_I$ , tiene una longitud fija  $N_I$  y el segundo bucle, el de  $k_F$ , tiene una longitud fija  $N_F$  dados por,

$$N_I = k_{IM} - k_{Im} + 1 = N_r - k_{Im} - n\Delta k + 1 \quad (2.20a)$$

$$N_F = k_{FM} - k_{Fm} + 1 = (n - 1)\Delta k + 1 \quad (2.20b)$$

Por lo tanto  $N_{Interv} = \sum_{i=1}^{N_I} N_F$ . Teniendo en cuenta que  $\sum_{i=1}^{N_I} 1 = N_I$  se obtiene la expresión 2.19.

Por otro lado, una vez concluido el proceso de optimización, se tendrá un vector de polos medios y varianzas para cada intervalo y se buscará el valor mínimo. Puede interesar conocer el intervalo óptimo o intervalo de varianza mínima. Si este intervalo ocupa la posición  $q$ -ésima en el vector de varianzas, el intervalo óptimo será  $[k_I(q), k_F(q)]$ ,

$$k_I(q) = k_{Im} + N_I(q) - 1 \quad (2.21a)$$

$$k_F(q) = k_I(q) + \Delta k - 2 + q - \sum_{i=1}^{N_I(q)-1} N_F \quad (2.21b)$$

donde el valor de  $N_I(q)$  debe cumplir la condición de que

$$\sum_{i=1}^{N_I(q)-1} N_F < q \leq \sum_{i=1}^{N_I(q)} N_F \quad (2.22)$$

Puesto que  $\sum_{i=1}^{N_I(q)} N_F = ((n-1)\Delta k + 1)N_I(q)$  y  $\sum_{i=1}^{N_I(q)-1} N_F = ((n-1)\Delta k + 1)(N_I(q) - 1)$ , entonces

$$N_I(q) - 1 < \frac{q}{(n-1)\Delta k + 1} \leq N_I(q) \quad (2.23)$$

Teniendo en cuenta que  $N_I(q)$  debe ser un número entero positivo, se deberá cumplir que

$$N_I(q) = \left\lceil \left( \frac{q}{(n-1)\Delta k + 1} \right) \right\rceil \quad (2.24)$$

donde  $\lceil x \rceil$  es la función techo de  $x$ , es decir, el primer número entero mayor o igual que  $x$ .

### 2.3. Tercera Fase: cálculo de $K$ y de la tensión de entrada equivalente

El cálculo de  $K$  para cada experimento se realiza con la fórmula

$$K_j = \frac{p_j \bar{\theta}_j(\infty)}{V_j} \quad j \in \{1, 2, \dots, Q\} \quad (2.25)$$

obteniendo el vector

$$\{K_1, K_2, \dots, K_Q\} \quad (2.26)$$

El problema que surge con  $(K_j, p_j)$  es que existiría un modelo de motor para cada entrada al motor.

El objetivo de esta fase es obtener un único modelo lineal junto con una corrección no lineal de la entrada al motor, de tal forma que se conserven las proporciones dadas por 2.11.

Para ello se selecciona, en primer lugar, un polo común a cualquier entrada al motor. Sea  $p$  este polo, entonces,

$$\tilde{K}_j = \frac{p \bar{\theta}_j(\infty)}{V_j} \quad j \in \{1, 2, \dots, Q\} \quad (2.27)$$

Los valores de  $\tilde{K}_j$  serán, en general, distintos para cada  $j$ , obteniéndose un vector

$$\{\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \dots, \tilde{K}_Q\} \quad (2.28)$$

A partir de este vector puede obtenerse un valor  $K$  común a todas las entradas. La consecuencia es que aparecerá una discrepancia en el valor de  $\bar{\theta}_j(\infty)$ , si el comportamiento del motor no fuese suficientemente lineal,

$$\bar{\theta}_j(\infty) \neq \frac{KV_j}{p} \quad j \in \{1, 2, \dots, Q\} \quad (2.29)$$

Para corregir esta discrepancia es suficiente obtener una entrada equivalente de valor

$$V_{eq,j} = \frac{\tilde{K}_j V_j}{K} \quad j \in \{1, 2, \dots, Q\} \quad (2.30)$$

y por lo tanto un vector

$$\{V_{eq,1}, V_{eq,2}, \dots, V_{eq,Q}\} \quad (2.31)$$

Entonces

$$\frac{\bar{\theta}_j(\infty)}{V_{eq,j}} = \frac{K}{p} \quad j \in \{1, 2, \dots, Q\} \quad (2.32)$$

Con esta nueva entrada  $V_{eq,j}$  se conservarían las proporciones dadas por 2.11 para el mismo valor de  $p$  y  $K$ . Sustituyendo 2.25 y 2.27 en 2.30,  $V_{eq,j}$  puede escribirse en la forma,

$$V_{eq,j} = \frac{K_j V_j}{p_j} \frac{p}{K} \quad (2.33)$$

En la siguiente subsección se propone un método de optimización para el cálculo de  $K$  y  $p$ .

Con esta idea puede hacerse un diseño de controladores lineales suponiendo que el modelo del motor es  $(K, p)$ . Y una vez implementado el controlador, la señal de control  $u(t) = V_{eq}(t)$  generada por el controlador deberá ser corregida a la señal de entrada al motor  $\tilde{u}(t) = V(t)$ .

En la Cuarta Fase final del algoritmo se obtendrá una única función  $f$  tal que  $V_{eq}(t) = f(V(t))$  que satisfaga la condición de que  $V_{eq,j} = f(V_j)$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, Q\}$ . En la Sección 4, se detalla cómo obtener la relación no lineal  $u(t)$  versus  $\tilde{u}(t)$ . Concretamente, se obtiene la función inversa de  $f$ , es decir,  $\tilde{u}(t) = f^{-1}(u(t))$ .

### 2.3.1. Propuesta para la estimación de los parámetros $p$ y $K$ del motor supuestos en la Tercera Fase

En la Tercera Fase se ha supuesto la elección de  $p$  y  $K$  únicos, pero no se ha dicho cómo hacerlo. Un cálculo óptimo sería aquél para el cual las tensiones equivalentes  $V_{eq,j}$  se encuentren lo más cerca posible de las tensiones  $V_j$ , ya que de esta forma la influencia de la parte no lineal sería mínima.

Por lo tanto, debe minimizarse el error  $e_j = V_{eq,j} - V_j$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, Q\}$ ,

$$e_j = \frac{K_j V_j}{p_j} \frac{p}{K} - V_j = \left( \frac{K_j}{p_j} \frac{p}{K} - 1 \right) V_j \quad (2.34)$$

Este error será mínimo si es mínima la diferencia entre ganancias a bajas frecuencias.

Una solución a este problema de optimización consiste en minimizar el error cuadrático, definido como

$$J = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^Q e_j^2 \quad (2.35)$$

Escribiremos  $e_j$  en la forma siguiente,

$$e_j = \alpha_j \frac{p}{K} - V_j \quad (2.36)$$

donde

$$\alpha_j = \frac{K_j V_j}{p_j} = \bar{\theta}_j(\infty) \quad (2.37)$$

Derivando  $J$  con respecto a  $p/K$ , se obtiene

$$\frac{\partial J}{\partial \left( \frac{p}{K} \right)} = \sum_{j=1}^Q \alpha_j \left( \alpha_j \frac{p}{K} - V_j \right) = \frac{p}{K} \sum_{j=1}^Q \alpha_j^2 - \sum_{j=1}^Q \alpha_j V_j \quad (2.38)$$

Igualando a cero esta derivada, despejando  $K/p$  y teniendo en cuenta que  $\alpha_j = \bar{\theta}_j(\infty)$ , se obtiene la expresión,

$$\frac{K}{p} = \frac{\sum_{j=1}^Q \left( \bar{\theta}_j(\infty) \right)^2}{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j} = \frac{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j \frac{K_j}{p_j}}{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j} \quad (2.39)$$

Se propone calcular  $1/p$  suponiendo que el motor es lineal, es decir, haciendo  $K_j = K$  en la relación dada por 2.39, por lo que se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{p} = \frac{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j \frac{1}{p_j}}{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j} \quad (2.40)$$

De esta manera  $K$  quedaría en la forma

$$K = \frac{\sum_{j=1}^Q \left( \bar{\theta}_j(\infty) \right)^2}{\sum_{j=1}^Q \frac{\bar{\theta}_j(\infty) V_j}{p_j}} = \frac{\sum_{j=1}^Q \bar{\theta}_j(\infty) V_j \frac{K_j}{p_j}}{\sum_{j=1}^Q \frac{\bar{\theta}_j(\infty) V_j}{p_j}} \quad (2.41)$$

que también se puede escribir como,

$$\frac{1}{K} = \frac{\sum_{j=1}^Q (\bar{\theta}_j(\infty))^2 \frac{1}{K_j}}{\sum_{j=1}^Q (\bar{\theta}_j(\infty))^2} \quad (2.42)$$

Como puede observarse, los valores de  $K$  o  $1/K$ ,  $1/p$  y  $K/p$  son medias ponderadas de los vectores  $\{K_j\}$  o  $\{1/K_j\}$ ,  $\{1/p_j\}$  y  $\{K_j/p_j\}$  respectivamente. El valor de  $K$  o de  $p$  puede obtenerse de cualquier otra forma a partir del vector  $\{K_j\}$  o  $\{p_j\}$  respectivamente, dando resultados similares. No haremos aquí un estudio que permita optimizar esta selección de  $K$  o  $p$ .

## 2.4. Cuarta Fase: Identificación de la función no lineal del modelo del motor mediante la técnica de interpolación polinómica

La parte no lineal del modelo del motor será una función no lineal,  $f$ , tal que

$$V_{eq}(t) = f(V(t)) \quad (2.43)$$

Aquí se propone que la función no lineal  $f$  sea un polinomio de grado  $N = 2Q$ ,

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Nx^N \quad (2.44)$$

donde  $a_i$  con  $i = 1, 2, \dots, N$ , son  $N$  constantes del modelo que deben ser identificadas.

Si la no linealidad del motor es independiente del signo de su entrada, el polinomio  $f(x)$  será simétrico con respecto al origen, es decir, que  $f(-x) = -f(x)$ . Este hecho permite reducir el grado del polinomio a  $N - 1$ , y el número de coeficientes a  $N/2$ , de tal manera que el polinomio tendría la forma,

$$f(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots + a_{2Q-1}x^{2Q-1} \quad (2.45)$$

Para la identificación de los parámetros constantes  $a_i$ , se utilizarán los  $Q$  experimentos realizados, de tal manera que se cumpla la relación dada por 2.32 para cada uno de ellos. Es decir, que  $f(V_j) = V_{eq,j}$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, Q\}$ , o lo que es lo mismo, se va a aplicar un método de interpolación polinómica. Por lo tanto se obtendrían  $Q$  ecuaciones lineales con  $N = 2Q$  incógnitas,

$$V_{eq,j} = a_1V_j + a_2V_j^2 + \dots + a_NV_j^N \quad (2.46)$$

Si se impone la condición de simetría, se tendrían otras  $Q$  ecuaciones lineales de la forma,

$$-V_{eq,j} = -a_1V_j + a_2V_j^2 - a_3V_j^3 + \dots - a_{N-1}V_j^{N-1} + a_NV_j^N \quad (2.47)$$

De esta manera, se tendrían  $2Q$  ecuaciones lineales con  $2Q$  incógnitas. Este sistema de ecuaciones lineales puede representarse en forma matricial, donde la matriz de la relación es una matriz de Vandermonde, por lo que es invertible.

No obstante, puede demostrarse que debido a la simetría en el origen, este sistema de ecuaciones lineales puede reducirse a otro de  $Q$  ecuaciones lineales con  $Q$  incógnitas, donde el polinomio resultante sería de grado  $2Q - 1$ , con la forma dada por 2.45. La demostración de que esto es así es sencilla, ya que si se suman, para cada  $j$ , las ecuaciones 2.46 y 2.47 se obtendría un sistema de ecuaciones lineales de coeficientes pares igualados a cero, y puesto que los coeficientes  $a_i$  deben ser únicos, la única solución posible es que sean nulos, es decir,  $a_2 = a_4 = \dots = a_{2Q} = 0$ .

Ahora, restando las ecuaciones 2.46 y 2.47 y dividiendo por dos, se obtendría un sistema de  $Q$  ecuaciones lineales con  $Q$  incógnitas,

$$V_{eq,j} = a_1V_j + a_3V_j^3 + \dots + a_{2Q-1}V_j^{2Q-1} \quad (2.48)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser representado en forma matricial

$$V_{eq} = \mathcal{V}a \quad (2.49)$$

donde

$$V_{eq} = \begin{bmatrix} V_{eq,1} \\ V_{eq,2} \\ \vdots \\ V_{eq,Q} \end{bmatrix} \quad (2.50a)$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{2Q-1} \end{bmatrix} \quad (2.50b)$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} V_1 & V_1^3 & \cdots & V_1^{2Q-1} \\ V_2 & V_2^3 & \cdots & V_2^{2Q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_Q & V_Q^3 & \cdots & V_Q^{2Q-1} \end{bmatrix} \quad (2.50c)$$

El vector de parámetros  $a$  se obtendría invirtiendo la matriz  $\mathcal{V}$ ,

$$a = \mathcal{V}^{-1}V_{eq} \quad (2.51)$$

En el Apéndice G se demuestra que  $\mathcal{V}$  es invertible.

Teniendo en cuenta la expresión de  $V_{eq,j}$  dada por 2.30, se obtiene el valor de  $\tilde{K}_j$ ,

$$\tilde{K}_j = K \left( a_1 + a_3 V_j^2 + \cdots + a_{2Q-1} V_j^{2Q-2} \right) \quad (2.52)$$

Esta expresión indica claramente que el valor de  $K$  del motor depende de la entrada  $V_j$  si el comportamiento del motor no es suficientemente lineal. Podemos definir, entonces, un valor de  $K_{eq}(t)$ , de la siguiente forma,

$$K_{eq}(t) = K \left( a_1 + a_3 V^2(t) + \cdots + a_{2Q-1} V^{2Q-2}(t) \right) \quad (2.53)$$

cumpliéndose que

$$V_{eq}(t) = \frac{K_{eq}(t)}{K} V(t) \quad (2.54)$$

El problema de utilizar esta técnica de interpolación es que se produce el llamado fenómeno de Runge, que consiste en que para valores elevados de  $Q$  el polinomio puede oscilar mucho entre puntos de datos consecutivos. En la práctica conviene evitar este problema utilizando otras técnicas de interpolación, como por ejemplo, obteniendo polinomios por partes (curvas "spline").

### 3. Modelado de un motor real

En esta Sección se obtiene el modelo de un motor real aplicando el algoritmo detallado en la Sección 2.

Los experimentos realizados han consistido en la obtención del número de pulsos proporcionado por un encoder situado en el eje del motor de  $q = 12$  pulsos/vuelta, cuando la entrada es una señal cuadrada periódica de  $P = 10$  y  $Q = 9$  experimentos. La duración del escalón de subida de tensión  $V_j$  con  $j = 1, \dots, Q$ , ha sido de  $0,6s$  y la del escalón nulo también de  $0,6s$ . El periodo de muestreo ha sido de  $T = 1ms$ .

Las tensiones de entrada  $V_j$  voltios han sido las siguientes:

$$V \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad (3.1)$$

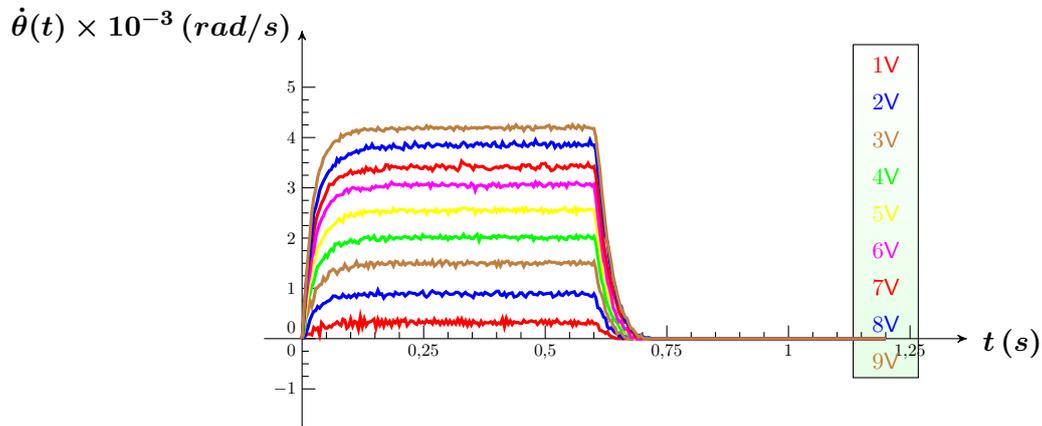


Figura 3.1: Velocidad angular en el eje de un motor DC real

En primer lugar se ha obtenido el promedio temporal de los  $P$  experimentos, obteniendo  $Q$  ficheros de datos. En la Figura 3.1 se muestran las curvas de velocidad angular  $\dot{\theta}_j(t_k)$  con  $t_k \in \{0, 10^{-3}, \dots, 1200 \times 10^{-3}\}$ , calculados a partir de los datos medidos promediados utilizando la expresión 2.1.

Para el cálculo de la velocidad angular de régimen permanente,  $\bar{\theta}_j(\infty)$  se ha aplicado la fórmula dada por 2.9 donde  $N_f = 601$  y  $N = 200$  que se corresponde con  $t_f = 0,6s$  y  $t_r = 0,4s$  ( $N_r = N_f - N = 401$ ). Es decir, se ha calculado el valor medio de los últimos  $0,2s$  del escalón.

Para el cálculo de  $pS_j$  en el transitorio de subida se ha utilizado la fórmula dada por 2.13 con intervalos variables, como se describe en la Subsección 2.2.1, con  $k_{Im} = 2$  ( $t_{Im} = 0,001s$ ),  $\Delta k = 60$  y  $n = 2$ . Se ha escogido el valor  $pS_j$  del intervalo de varianza mínima.

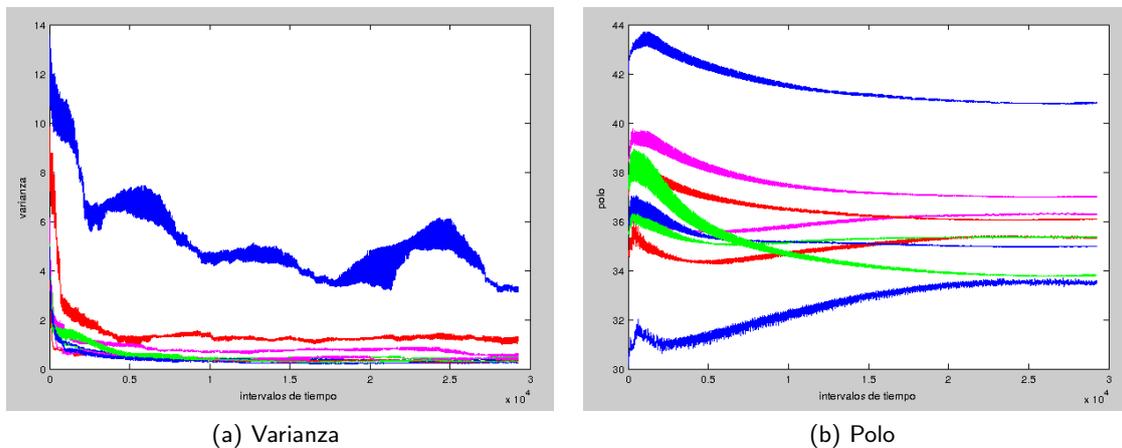


Figura 3.2: Varianza y polo medio  $pS_j$  en cada intervalo de tiempo

En la Figura 3.2 se representan las curvas de varianza y del polo medio en función del intervalo  $[k_I, k_F]$  (eje de abcisas), donde la numeración de los intervalos se ha obtenido de manera consecutiva mediante dos bucles,

```

kIM=Nr-n*Deltak;
for kI=kIm:kIM
    kFm=kI+Deltak;
    kFM=kI+n*Deltak;
    for kF=kFm:kFM
        .
        .
        .
    end

```

end

Las curvas de la Figura 3.2 pretenden ser simplemente indicativas por lo que no se ha puesto leyenda.

Para el cálculo de  $pB_j$  en el transitorio de bajada se ha utilizado la fórmula dada por 2.14 donde  $k_f = 1201$  y  $k_0 = 601$ .

Finalmente, se ha obtenido  $p_j$  como una media de  $pS_j$  y  $pB_j$ , es decir, utilizando la fórmula 2.15 con  $\alpha = 0,5$ .

A partir de este valor de  $p_j$  se obtiene  $K_j$  aplicando la fórmula dada por 2.25.

Para el cálculo de  $p$  y  $K$  se ha seguido el método descrito en la Subsección 2.3.1, lo que permite también obtener la tensión equivalente  $Ve_{qj}$  utilizando la fórmula 2.33. El error cuadrático dado por 2.35 ha sido  $J = 0,2297$ . En la Tablas 3.1 y 3.2 y en la Figura 3.3 se muestran los valores obtenidos.

$V_j$	$Ve_{qj}$
1	0,66687
2	1,8264
3	3,0756
4	4,1367
5	5,2546
6	6,2972
7	7,015
8	7,9544
9	8,6279

Tabla 3.1: Valores de  $Ve_{qj}$  obtenidos en la tercera fase

p	35,9154
K	17461

Tabla 3.2: Valores de p y K obtenidos en la tercera fase

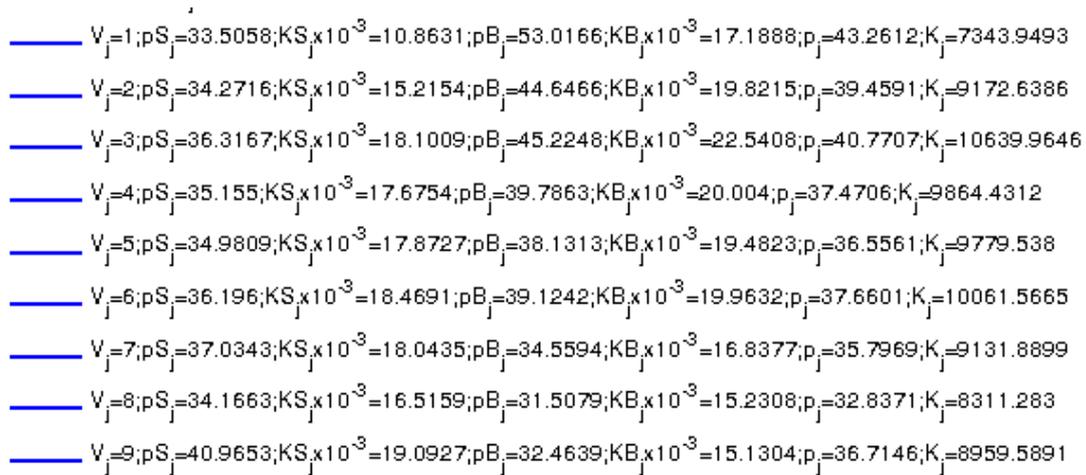


Figura 3.3: Valores de p y K obtenidos en las tres primeras fases

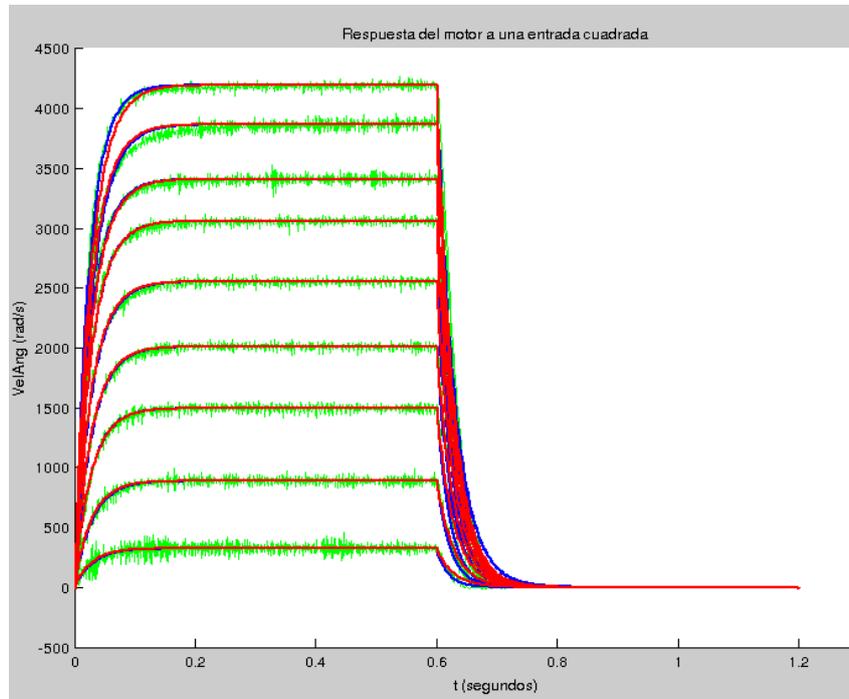


Figura 3.4: Respuestas del motor (explicación en el texto)

En la Figura 3.4 se representan en azul las respuestas de la parte lineal del motor a las señales de entrada cuadrada, donde se ha utilizado  $pS_j$  para el escalón de subida, y  $pB_j$  para el escalón de bajada. Las respuestas a las señales de entrada cuadrada con  $p = 35,9154$  y  $K = 17461$  se representan en color rojo. Todas ellas están superpuestas a las velocidades angulares medidas (color verde), que están representadas también en la Figura 3.1.

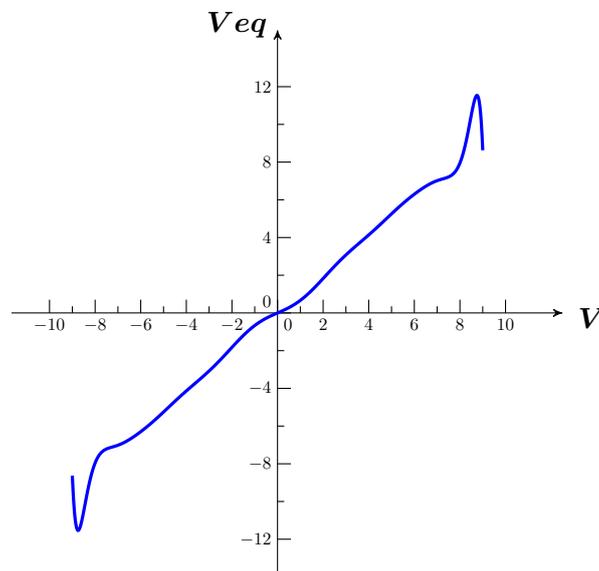


Figura 3.5: Polinomio de interpolación impar de grado 17

En la Figura 3.5 se muestra la curva de interpolación polinómica  $V_{eq}-V$  siguiendo el método explicado en la Subsección 2.4, obteniendo los valores de los coeficientes del polinomio impar de

grado  $2Q - 1$  siguientes,

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{2Q-1} \end{bmatrix} = 10^{-20} \begin{bmatrix} 52597393240172765184,000000 \\ 16027040554921168896,000000 \\ -2073926822836621056,000000 \\ 142493094320705376,000000 \\ -5684644001475050,000000 \\ 136226263708353,671875 \\ -1933315989656,758789 \\ 14934202272,293077 \\ -48181879,170126 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

En 3.2 los coeficientes del polinomio están multiplicados por  $10^{20}$  porque la precisión de estos valores es muy importante para evitar errores numéricos en la interpolación.

Puede apreciarse que para valores entre 8 y 9 voltios la curva oscila excesivamente. Para suavizar el polinomio se ha hecho un estudio empírico, que consiste en añadir puntos  $V_j > 9$  que satisfagan la condición de que  $V_j = V_{eq_j}$ . De esta manera la función de error cuadrático  $J$  de la tercera fase no se ve alterada, permitiendo mantener los mismos valores de  $p$  y  $K$  obtenidos en la tercera fase. En la Figura 3.6 se muestra la curva de interpolación extendida, añadiendo los puntos  $\{9,4; 9,6; 9,8\}$ , cuyos coeficientes son

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{2Q'-1} \end{bmatrix} = 10^{-20} \begin{bmatrix} 52350607024243171328,000000 \\ 16410636174885726208,000000 \\ -2238536983581650944,000000 \\ 173117348095936288,000000 \\ -8670950267083310,000000 \\ 304718139112955,312500 \\ -7736148426674,490234 \\ 139933770581,362793 \\ -1731851185,361269 \\ 13761981,282901 \\ -62750,253940 \\ 124,193751 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

donde  $Q' = Q + 3$ .

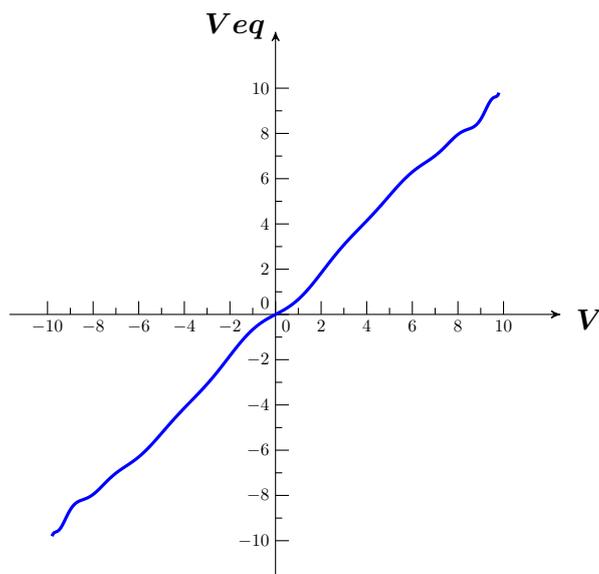


Figura 3.6: Polinomio de interpolación impar extendido de grado 23

#### 4. Ejemplo de diseño de un controlador no lineal de posición angular de un motor DC mediante linealización por inversión de la entrada equivalente

En esta Sección no se va a hacer un diseño completo de un sistema de control realimentado, sino tan solo se explica una técnica de cómo puede abordarse su diseño cuando se conoce el modelo no lineal del sistema que se quiere controlar. La idea es invertir la parte no lineal del modelo, como se muestra en la Figura 4.1 para el ejemplo del motor modelado en la Sección 3.

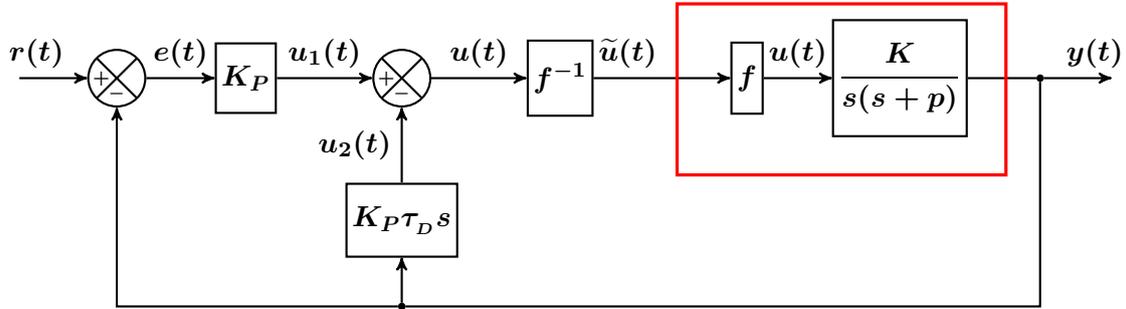


Figura 4.1: Sistema de control realimentado no lineal con controlador P-D

Para el cálculo de  $f^{-1}$  se seguirá el mismo procedimiento que el seguido en la Cuarta Fase del algoritmo de modelado de la Sección 2, es decir, se hará una interpolación polinómica con los datos experimentales. La única diferencia es que ahora la entrada debe ser  $V_{eq,j}$  y la salida debe ser  $V_j$ .

Con los datos experimentales se tendrá un sistema de  $Q$  ecuaciones lineales con  $Q$  incógnitas,

$$V_j = b_1 V_{eq,j} + b_2 V_{eq,j}^3 + \dots + b_Q V_{eq,j}^{2Q-1} \quad (4.1)$$

Este sistema de ecuaciones puede ser representado en forma matricial

$$V = \mathcal{V}_{eq} b \quad (4.2)$$

donde

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_Q \end{bmatrix} \quad (4.3a)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_Q \end{bmatrix} \quad (4.3b)$$

$$\mathcal{V}_{eq} = \begin{bmatrix} V_{eq,1} & V_{eq,1}^3 & \dots & V_{eq,1}^{2Q-1} \\ V_{eq,2} & V_{eq,2}^3 & \dots & V_{eq,2}^{2Q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{eq,Q} & V_{eq,Q}^3 & \dots & V_{eq,Q}^{2Q-1} \end{bmatrix} \quad (4.3c)$$

El vector de parámetros  $b$  se obtendría invirtiendo la matriz  $\mathcal{V}_{eq}$ ,

$$b = \mathcal{V}_{eq}^{-1} V \quad (4.4)$$

La demostración de que la matriz  $\mathcal{V}_{eq}$  es invertible es idéntica a la demostración de que  $\mathcal{V}$  es invertible, y se encuentra en el Apéndice G.

Utilizando la notación de la Figura 4.1,

$$\tilde{u}(t) = b_1 u(t) + b_2 u^3(t) + \dots + b_Q u^{2Q-1}(t) \quad (4.5)$$

Para el cálculo de  $b$  se utilizarán los datos del motor estudiado en la Sección 3, donde se obtuvo la relación entre  $V$  y  $V_{eq}$  necesarias, recogida en la Tabla 3.1.

Los valores de los parámetros del polinomio  $f^{-1}$  son los siguientes,

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_Q \end{bmatrix} = 10^{-20} \begin{bmatrix} 160847196028152414208,000000 \\ -26347922032274841600,000000 \\ 4322322265093997568,000000 \\ -363554628276008320,000000 \\ 17239993144634128,000000 \\ -477930909965441,125000 \\ 7651637860447,907227 \\ -65284920745,084717 \\ 229031063,402778 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

En la Figura 4.2 se muestra la curva del polinomio invertido  $f^{-1}$ . Puede observarse que para valores elevados de  $V_{eq} = u$  se produce una oscilación excesiva, como ocurre con la curva de  $f$  de la Figura 3.5.

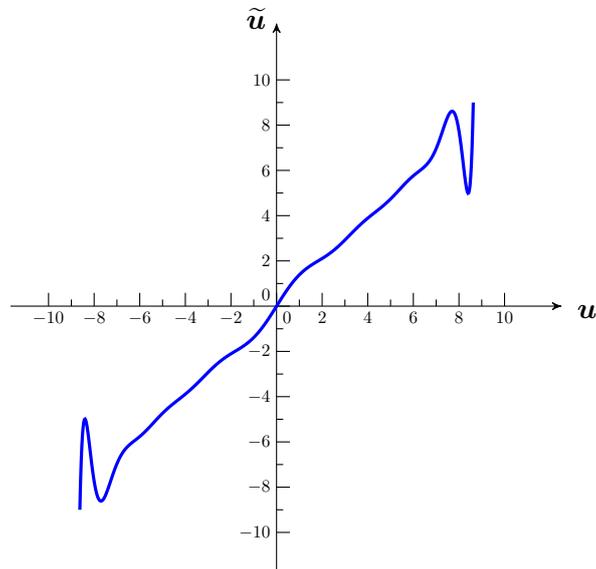


Figura 4.2: Polinomio de interpolación  $f^{-1}$

Para suavizar  $f^{-1}$  puede ampliarse el polinomio, como se hizo en la sección de modelado, obteniendo el vector  $b$  siguiente,

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{Q'} \end{bmatrix} = 10^{-20} \begin{bmatrix} 161420208519579402240,000000 \\ -27972980731616759808,000000 \\ 5147272154662284288,000000 \\ -523422280457548608,000000 \\ 32724482599262236,000000 \\ -1328367048308069,750000 \\ 35901555312352,882812 \\ -649115490056,463867 \\ 7733802412,063457 \\ -58137308,617381 \\ 249474,432325 \\ -465,230157 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde  $Q' = Q + 3$ .

En la Figura 4.3 se muestra la curva resultante de  $f^{-1}$  extendido.

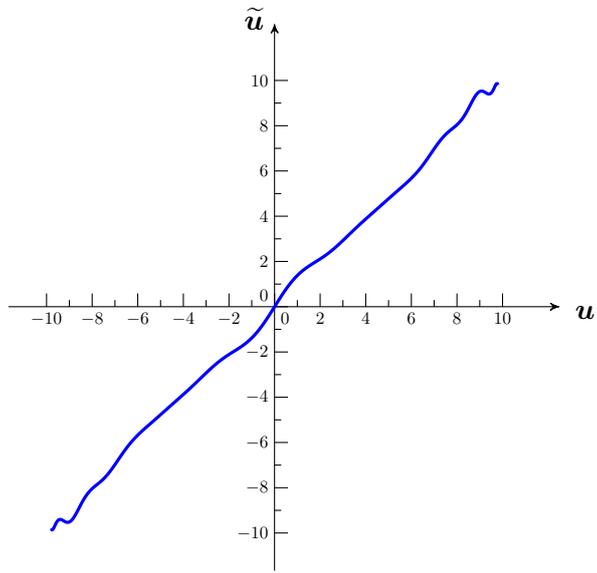


Figura 4.3: Polinomio de interpolación  $f^{-1}$  extendido

# Apéndices

## A. Obtención analítica del polo del motor con una entrada escalón bajo condiciones iniciales nulas

De acuerdo con el modelo simplificado del motor,

$$\ddot{\theta}_m(t) + p\dot{\theta}_m(t) = Ku(t) \quad (\text{A.1})$$

donde  $\theta_m(t)$  representa la posición angular del motor.

La función de transferencia de posición angular es,

$$G_{\theta_m}(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (\text{A.2})$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de la posición angular bajo condiciones iniciales nulas es,

$$\Theta_m(s) = G_{\theta_m}(s)U(s) \quad (\text{A.3})$$

Supongamos que se hace un experimento que consiste en aplicar al motor una tensión constante  $U$ , entonces

$$\Theta_m(s) = \frac{KU}{s^2(s+p)} \quad (\text{A.4})$$

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\Theta_m(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \frac{\alpha_3}{s+p} \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\alpha_1 = -\frac{KU}{p^2} \quad (\text{A.6a})$$

$$\alpha_2 = \frac{KU}{p} \quad (\text{A.6b})$$

$$\alpha_3 = -\alpha_1 \quad (\text{A.6c})$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa, podemos escribir  $\theta_m(t)$  en la forma

$$\theta_m(t) = \frac{KU}{p} \left( t - \frac{1}{p} (1 - e^{-pt}) \right) \quad (\text{A.7})$$

Derivando con respecto al tiempo esta expresión se obtiene la velocidad angular,

$$\dot{\theta}_m(t) = \frac{KU}{p} (1 - e^{-pt}) \quad (\text{A.8})$$

Podemos comprobar que el valor final de la velocidad angular es,

$$\dot{\theta}_m(\infty) = \frac{KU}{p} \quad (\text{A.9})$$

Sustituyendo A.8 y A.9 en A.7,

$$\theta_m(t) = \dot{\theta}_m(\infty)t - \frac{\dot{\theta}_m(t)}{p} \quad (\text{A.10})$$

Despejando  $p$  de la relación A.10,

$$p = \frac{\dot{\theta}_m(t)}{\dot{\theta}_m(\infty)t - \theta_m(t)}, \quad t > 0 \quad (\text{A.11})$$

## B. Obtención analítica del polo del motor con una entrada nula bajo condiciones iniciales no nulas

De acuerdo con el modelo simplificado del motor,

$$\ddot{\theta}_m(t) + p\dot{\theta}_m(t) = Ku(t) \quad (\text{B.1})$$

La función de transferencia de posición angular es,

$$G_{\theta_m}(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad (\text{B.2})$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace de la posición angular bajo condiciones iniciales no nulas es,

$$\Theta_m(s) = G_{\theta_m}(s)U(s) + \frac{\theta_m(0^-)s + \dot{\theta}_m(0^-) + p\theta_m(0^-)}{s(s+p)} \quad (\text{B.3})$$

Supongamos que se hace un experimento que consiste en “apagar” bruscamente el motor cuando éste se encuentre con unas condiciones iniciales  $(\theta_m(0^-), \dot{\theta}_m(0^-))$ , entonces

$$\Theta_m(s) = \frac{\theta_m(0^-)s + \dot{\theta}_m(0^-) + p\theta_m(0^-)}{s(s+p)} \quad (\text{B.4})$$

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\Theta_m(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+p} \quad (\text{B.5})$$

donde

$$\alpha_1 = \theta_m(0^-) + \frac{\dot{\theta}_m(0^-)}{p} \quad (\text{B.6a})$$

$$\alpha_2 = -\frac{\dot{\theta}_m(0^-)}{p} \quad (\text{B.6b})$$

Aplicando la transformada de Laplace inversa, podemos escribir  $\theta_m(t)$  en la forma

$$\theta_m(t) = \theta_m(0^-) + \frac{\dot{\theta}_m(0^-)}{p} (1 - e^{-pt}) \quad (\text{B.7})$$

Derivando con respecto al tiempo esta expresión se obtiene la velocidad angular,

$$\dot{\theta}_m(t) = \dot{\theta}_m(0^-)e^{-pt} \quad (\text{B.8})$$

Podemos comprobar que, si la condición inicial es el valor final de otro experimento, es decir,  $\dot{\theta}_m(0^-) = \dot{\theta}_{m,\infty} = \frac{KU}{p}$ , se cumple, utilizando la expresión A.8, que  $\dot{\theta}_{m,\infty} - \dot{\theta}_m(t)$  coincide con la relación B.8,

$$\dot{\theta}_{m,\infty} - \dot{\theta}_m(t) = \frac{KU}{p}e^{-pt} = \dot{\theta}_{m,\infty}e^{-pt} \quad (\text{B.9})$$

Lo que esto significa, es que idealmente, las curvas de subida y de bajada de una señal cuadrada dan los mismos resultados. Sin embargo, debido a que los errores que se comenten en uno u otro experimento son distintos, ya que la subida se ve afectada al comienzo por la fricción, y la bajada es al final, puede ocurrir que, en la práctica, el comportamiento sea distinto en una y otra situación.

También podemos comprobar que el valor inicial de la velocidad angular coincide con la condición inicial, y que el valor final es nulo,

$$\dot{\theta}_m(0^+) = \dot{\theta}_m(0^-) \quad (\text{B.10a})$$

$$\dot{\theta}_m(\infty) = 0 \quad (\text{B.10b})$$

Este resultado es el esperado, ya que el motor es un sistema continuo que, al “apagarlo”, se termina deteniendo.

Sustituyendo B.8 en B.7,

$$\theta_m(t) = \theta_m(0^-) + \frac{1}{p} \left( \dot{\theta}_m(0^-) - \dot{\theta}_m(t) \right) \quad (\text{B.11})$$

Despejando  $p$  de la relación B.11,

$$p = \frac{\dot{\theta}_m(0^-) - \dot{\theta}_m(t)}{\theta_m(t) - \theta_m(0^-)}, \quad t > 0^- \quad (\text{B.12})$$

## C. Obtención analítica del polo del motor con una señal de entrada cuadrada

Supongamos que el experimento se ha realizado de tal manera que la condición inicial se haya obtenido aplicando una señal de entrada escalón al motor bajo condiciones iniciales nulas de duración suficiente como para que se haya alcanzado el régimen permanente, y que en el instante de tiempo  $t_0$  se “apaga” bruscamente el motor. Es decir, que se ha realizado un experimento con una señal cuadrada. Entonces se cumplirá la relación A.11 donde  $\dot{\theta}_m(t_0) = \dot{\theta}_{m,\infty}$  siendo  $\dot{\theta}_{m,\infty}$  el valor de la velocidad angular en el régimen permanente cuando la entrada ha sido una señal escalón. De aquí que las igualdades A.11 y B.12 deban coincidir en el caso ideal,

$$p = \frac{\dot{\theta}_{m,\infty}}{\dot{\theta}_{m,\infty}t_0 - \theta_m(t_0)} = \frac{\dot{\theta}_{m,\infty} - \dot{\theta}_m(t)}{\theta_m(t) - \theta_m(t_0)} \quad (\text{C.1})$$

De la igualdad de la izquierda de C.1, se obtiene que

$$\theta_m(t_0) = \dot{\theta}_{m,\infty}t_0 - \frac{\dot{\theta}_{m,\infty}}{p} \quad (\text{C.2})$$

Sustituyendo esta relación en la expresión de la derecha de C.1, y simplificando, se obtiene que,

$$1 = \frac{\dot{\theta}_{m,\infty} - \dot{\theta}_m(t)}{p \left( \theta_m(t) - \dot{\theta}_{m,\infty}t_0 \right) + \dot{\theta}_{m,\infty}} \quad (\text{C.3})$$

Despejando  $p$  de C.3,

$$p = \frac{\dot{\theta}_m(t)}{\dot{\theta}_{m,\infty}t_0 - \theta_m(t)}, \quad t \geq t_0 \quad (\text{C.4})$$

Sabemos que el motor se detiene cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir que  $\dot{\theta}_m(\infty) = 0$ . Puesto que el polo debe tener un valor finito, necesariamente  $\dot{\theta}_{m,\infty}t_0 - \theta_m(\infty) = 0$ . Como consecuencia, la posición angular final del motor vendrá dada por la expresión,

$$\theta_m(\infty) = \dot{\theta}_{m,\infty}t_0 \quad (\text{C.5})$$

Teniendo en cuenta la expresión C.4, se deberá cumplir que en  $t = t_0$ ,  $\dot{\theta}_m(t_0) = \dot{\theta}_{m,\infty}$  y

$$p = \frac{\dot{\theta}_{m,\infty}}{\dot{\theta}_{m,\infty}t_0 - \theta_m(t_0)} \quad (\text{C.6})$$

La expresión C.6 puede escribirse en la forma,

$$\frac{1}{p} = t_0 - \frac{\theta_m(t_0)}{\dot{\theta}_{m,\infty}} = \left( 1 - \frac{\theta_m(t_0)}{\theta_m(\infty)} \right) t_0 \quad (\text{C.7})$$

donde se ha tenido en cuenta la relación C.5.

Supongamos que el motor se detiene en  $t \geq t_p$ , entonces  $\theta_m(\infty) = \theta_m(t_p)$ . De aquí que la relación C.7 también pueda escribirse en la forma,

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta_m(t_p) - \theta_m(t_0)}{\dot{\theta}_{m,\infty}} \quad (\text{C.8})$$

donde se ha tenido en cuenta la relación C.5.

## D. Discretización del polo del motor obtenido con una entrada escalón bajo condiciones iniciales nulas

Al realizar un experimento con un microcontrolador se obtiene una secuencia de valores discretos de la salida del motor, por lo que la aplicación de la relación A.11 puede dar lugar a valores del polo dependientes del tiempo discreto. Es decir, haciendo  $t = t_k$  en la relación A.11,

$$p(t_k) = \frac{\dot{\theta}_m(t_k)}{\dot{\theta}_m(\infty)t_k - \theta_m(t_k)} \quad (\text{D.1})$$

donde  $k \in \{0, 1, \dots\}$  representa un índice temporal.

En general, los instantes de tiempo en los que se realizan las medidas no están uniformemente separados, pero si las medidas se hiciesen uniformemente en el tiempo con un periodo de muestreo constante  $T$ , entonces  $t_k = kT$ .

Por otro lado, si solo se han realizado medidas de posición, no se conoce la velocidad angular, por lo que deberá hacerse alguna aproximación sobre su valor. Supongamos que se utiliza la primera aproximación de Euler de la derivada, es decir,

$$\dot{\theta}_m(t_k) \approx \frac{\theta_m(t_k) - \theta_m(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \quad (\text{D.2})$$

Hay que tener en cuenta que, para  $k = 0$ , no es posible obtener la velocidad angular a partir de esta expresión. Pero puesto que el experimento se está haciendo bajo condiciones iniciales nulas,  $\dot{\theta}_m(t_0) = \dot{\theta}_m(0) = 0$ .

Supongamos también que las medidas de la posición angular no vienen dadas en radianes, sino por el número de pulsos de un encoder incremental situado en el eje del motor. Entonces, para  $k > 0$ ,

$$p(t_k) \approx \frac{N_m(t_k) - N_m(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1}) \left( \frac{q\dot{\theta}_m(\infty)}{2\pi} t_k - N_m(t_k) \right)} \quad (\text{D.3})$$

donde  $N_m(t_k)$  representa el número de pulsos medido en el instante de tiempo  $t_k$  en el eje del motor y  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) del encoder incremental.

## E. Discretización del polo del motor obtenido con una entrada nula bajo condiciones iniciales no nulas

En esta Sección se seguirá el mismo procedimiento que en la Sección D, pero para el caso estudiado en la Sección B donde el polo viene dado por la expresión B.12.

La aplicación de la relación B.12, haciendo  $t = t_k$ , es

$$p(t_k) = \frac{\dot{\theta}_m(0^-) - \dot{\theta}_m(t_k)}{\theta_m(t_k) - \theta_m(0^-)} \quad (\text{E.1})$$

donde  $k \in \{0, 1, \dots\}$  representa un índice temporal.

Supongamos que solo se han realizado medidas con un encoder incremental situado en el eje del motor y que la velocidad angular se aproxima por la primera aproximación de Euler de la derivada. Entonces,

$$p(t_k) \approx \frac{\frac{q\dot{\theta}_m(0)}{2\pi} (t_k - t_{k-1}) - N_m(t_k) + N_m(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1}) (N_m(t_k) - N_m(0))} \quad (\text{E.2})$$

donde  $N_m(t_k)$  representa el número de pulsos medido en el instante de tiempo  $t_k$  en el eje del motor y  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) del encoder incremental.

Si el valor de la velocidad angular inicial  $\dot{\theta}_m(0)$  no se ha podido obtener como una medida sino como un cálculo a partir de la medida de posición angular de un encoder incremental, entonces se puede utilizar la primera aproximación de Euler de la derivada, pero será necesario conocer el valor  $\theta_m(t_{-1})$ . Este valor no será, en general, nulo, y dependerá de cómo se haya alcanzado el estado inicial.

## F. Discretización del polo del motor obtenido con una señal de entrada cuadrada

La expresión de  $p(t_k)$  bajo el supuesto de que la señal de entrada es una señal cuadrada, es decir, a partir de la relación dada por C.4, viene dada por

$$p(t_k) = \frac{\dot{\theta}_m(t_k)}{\dot{\theta}_{m,\infty} t_0 - \theta_m(t_k)}, \quad t_k \geq t_0 \quad (\text{F.1})$$

Suponiendo que se realizan medidas con un encoder incremental, y se aproxima la velocidad angular por la primera aproximación de Euler de la derivada,

$$p(t_k) = \frac{N_m(t_k) - N_m(t_{k-1})}{(t_k - t_{k-1}) \left( \frac{q \dot{\theta}_{m,\infty} t_0}{2\pi} - N_m(t_k) \right)} \quad t_k \geq t_0 \quad (\text{F.2})$$

donde  $q$  es el número de pulsos por vuelta (CPR, Cycles Per Revolution) del encoder incremental.

Por último, la relación C.8 permite obtener un valor del polo con valores extremos de la respuesta a una señal cuadrada.

El promedio temporal de la velocidad angular de toda la trayectoria de bajada, utilizando la aproximación de Euler de la derivada, viene dado por

$$\bar{\dot{\theta}} = \frac{\sum_{j=k_0+1}^{k_p} (\theta(j) - \theta(j-1))}{T(k_p - k_0)} \quad (\text{F.3})$$

donde se ha hecho  $t_p = k_p T$  y  $t_0 = k_0 T$  siendo  $t_p$  el instante de tiempo en que el motor se detiene.

Puesto que

$$\sum_{j=k_0+1}^{k_p} (\theta(j) - \theta(j-1)) = \theta(k_p) - \theta(k_0) \quad (\text{F.4})$$

la relación C.8 puede escribirse en la forma,

$$\frac{1}{p} = \frac{T(k_p - k_0) \bar{\dot{\theta}}}{\dot{\theta}_{m,\infty}} \quad (\text{F.5})$$

Si  $k_f \geq k_p$  con el motor parado, conviene escribir la expresión F.5 en la forma

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta(k_f) - \theta(k_0)}{\dot{\theta}_{m,\infty}} \quad (\text{F.6})$$

## G. Demostración de la invertibilidad de la matriz $\mathcal{V}$

En este Apéndice se va a demostrar que la matriz  $\mathcal{V}$  de la ecuación siguiente es invertible:

$$V_{eq} = \mathcal{V}a \quad (\text{G.1})$$

donde

$$V_{eq} = \begin{bmatrix} V_{eq,1} \\ V_{eq,2} \\ \vdots \\ V_{eq,Q} \end{bmatrix} \quad (\text{G.2a})$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{2Q-1} \end{bmatrix} \quad (\text{G.2b})$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} V_1 & V_1^3 & \dots & V_1^{2Q-1} \\ V_2 & V_2^3 & \dots & V_2^{2Q-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_Q & V_Q^3 & \dots & V_Q^{2Q-1} \end{bmatrix} \quad (\text{G.2c})$$

Para ello se planteará el problema con otra notación, hasta que se resuelva de manera general.

Sea el sistema de ecuaciones lineales de la forma  $y = Ax$  donde  $A$  es la matriz cuadrada de orden  $n$  de Vandermonde,

$$y = Ax \quad (\text{G.3})$$

donde

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\text{G.4a})$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{G.4b})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{G.4c})$$

con  $\alpha_i \neq 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Puede demostrarse por inducción, que el determinante de  $A$  viene dado por la relación

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \quad (\text{G.5})$$

Por lo tanto, la matriz de Vandermonde es invertible si  $\alpha_j \neq \alpha_i$ , para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

A partir de la matriz de Vandermonde puede construirse otra matriz invertible  $B$ , tal que  $B = DA$ ,

donde  $D$  es una matriz diagonal,

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (\text{G.6a})$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \cdots & \alpha_1^n \\ \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & \cdots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n^2 & \alpha_n^3 & \cdots & \alpha_n^n \end{bmatrix} \quad (\text{G.6b})$$

El determinante de  $B$  será el producto de determinantes de  $D$  y de  $A$ ,

$$\det(B) = \left( \prod_{i=1}^n \alpha_i \right) \left( \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (\alpha_j - \alpha_i) \right) \quad (\text{G.7})$$

Construyamos el sistema de ecuaciones  $y = Bx$  donde el orden de la matriz  $B$  sea par,  $n = 2Q$ . Reordenaremos los elementos del vector  $x$  en la forma siguiente,

$$x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{2Q-1} \\ x_2 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{2Q} \end{bmatrix} \quad (\text{G.8})$$

El modulo del determinante de la matriz  $B$  no cambia de valor si se conmutan columnas completas entre sí,

$$B' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1^3 & \cdots & \alpha_1^{2Q-1} & \alpha_1^2 & \alpha_1^4 & \cdots & \alpha_1^{2Q} \\ \alpha_2 & \alpha_2^3 & \cdots & \alpha_2^{2Q-1} & \alpha_2^2 & \alpha_2^4 & \cdots & \alpha_2^{2Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{2Q} & \alpha_{2Q}^3 & \cdots & \alpha_{2Q}^{2Q-1} & \alpha_{2Q}^2 & \alpha_{2Q}^4 & \cdots & \alpha_{2Q}^{2Q} \end{bmatrix} \quad (\text{G.9})$$

Se cumpla que  $y = B'x'$ , siendo  $B'$  invertible.

Tampoco cambia el modulo del determinante de la matriz  $B'$  si se conmutan filas completas entre sí,

$$B'' = \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \alpha_1 & \alpha_1^3 & \cdots & \alpha_1^{2Q-1} & \alpha_1^2 & \alpha_1^4 & \cdots & \alpha_1^{2Q} \\ \alpha_3 & \alpha_3^3 & \cdots & \alpha_3^{2Q-1} & \alpha_3^2 & \alpha_3^4 & \cdots & \alpha_3^{2Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{2Q-1} & \alpha_{2Q-1}^3 & \cdots & \alpha_{2Q-1}^{2Q-1} & \alpha_{2Q-1}^2 & \alpha_{2Q-1}^4 & \cdots & \alpha_{2Q-1}^{2Q} \\ \hline \alpha_2 & \alpha_2^3 & \cdots & \alpha_2^{2Q-1} & \alpha_2^2 & \alpha_2^4 & \cdots & \alpha_2^{2Q} \\ \alpha_4 & \alpha_4^3 & \cdots & \alpha_4^{2Q-1} & \alpha_4^2 & \alpha_4^4 & \cdots & \alpha_4^{2Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{2Q} & \alpha_{2Q}^3 & \cdots & \alpha_{2Q}^{2Q-1} & \alpha_{2Q}^2 & \alpha_{2Q}^4 & \cdots & \alpha_{2Q}^{2Q} \end{array} \right] \quad (\text{G.10})$$

Entonces se cumplirá que  $y' = B''x'$  donde

$$y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{2Q-1} \\ y_2 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{2Q} \end{bmatrix} \quad (\text{G.11})$$

La matriz  $B''$  puede ser escrita en forma de bloques de submatrices

$$B'' = \left[ \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right] \quad (\text{G.12})$$

La ecuación matricial  $y' = B''x'$  puede escribirse en la forma de dos ecuaciones matriciales,

$$y'_1 = B_1x'_1 + B_2x'_2 \quad (\text{G.13a})$$

$$y'_2 = B_3x'_1 + B_4x'_2 \quad (\text{G.13b})$$

Supongamos que  $\alpha_{2j} = -\alpha_{2j-1}$  con  $j \in \{1, 2, \dots, Q\}$ . Entonces,  $B_1 = -B_3$  y  $B_2 = B_4$ . Ahora, restando y sumando ambos sistemas de ecuaciones se cumple que

$$y'_1 - y'_2 = 2B_1x'_1 \quad (\text{G.14a})$$

$$y'_1 + y'_2 = 2B_2x'_2 \quad (\text{G.14b})$$

Estas dos ecuaciones matriciales pueden escribirse en la forma compacta

$$Ey' = 2Cx' \quad (\text{G.15})$$

donde

$$E = \begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix} \quad (\text{G.16a})$$

$$C = \left[ \begin{array}{c|c} B_1 & O \\ \hline O & B_2 \end{array} \right] \quad (\text{G.16b})$$

donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $Q$ .

Por un lado, puede demostrarse que el determinante de la matriz  $C$  es

$$\det(C) = \det(B_1)\det(B_2) \quad (\text{G.17})$$

Por otro lado, puesto que la ecuación  $y' = B''x'$  tiene solución única para todo  $y'$ , ya que existe la inversa de  $B''$ , deberá cumplirse que  $Ey' = 2CB''^{-1}y'$ , para todo  $y'$ . De aquí que  $E = 2CB''^{-1}$ , o lo que es lo mismo  $2C = EB''$ . Puesto que el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes,  $\det(2C) = \det(B'')\det(E)$ . Es fácil demostrar que el  $\det(E) = \det(2I) \neq 0$ , y como  $\det(B'') \neq 0$ , entonces  $\det(C) \neq 0$ , por lo tanto  $\det(B_1) \neq 0$  y  $\det(B_2) \neq 0$ . También puede comprobarse que  $DB_2 = B_1$  donde  $D$  es una matriz diagonal, por lo que si  $\det(B_1) \neq 0$  también debe serlo el  $\det(B_2)$  y viceversa.

Por último, si además se impone que  $y'_1 = -y'_2$ , entonces, teniendo en cuenta la ecuación [G.14b](#), se deberá cumplir que  $0 = B_2x'_2$ , y como  $B_2$  es invertible, entonces

$$x'_2 = 0 \quad (\text{G.18})$$

Y también, teniendo en cuenta la ecuación [G.14a](#),

$$x'_1 = B_1^{-1}y'_1 \quad (\text{G.19})$$

Haciendo ahora el cambio de notación vemos que,

$$\mathcal{V} = B_1 \tag{G.20a}$$

$$a = x'_1 \tag{G.20b}$$

$$V_j = \alpha_j \tag{G.20c}$$

$$V_{eq;j} = y'_{1,2j-1} \tag{G.20d}$$

con  $j = 1, 2, \dots, Q$ .