Transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$ de funciones causales: tablas y propiedades

Félix Monasterio-Huelin

8 de febrero de 2016

Índice

Índice de Figuras

Índice de Tablas

1. Introducción a las transformadas de Laplace y $\mathcal{Z}$ de funciones causales

Sea una función $f(t)$ que representa la salida o la entrada de un sistema o al mismo sistema. La diferencia entre $f(0^+)$ y $f(0^-)$ puede entenderse dentro del contexto de la teoría de sistemas dinámicos en el siguiente sentido. Si $f(t)$ es la salida de un sistema, $f(0^+)$ es el valor que toma la función $f(t)$ en $t = 0$ después de que el sistema haya sido excitado, mientras que $f(0^-)$ lo es antes de haber sido excitado. En este sentido causal la **condición inicial o valor pre-inicial** es $f(0^-)$ y no $f(0^+)$. A $f(0^+)$ lo llamaremos **valor inicial o valor post-inicial**. Las funciones, sistemas o señales serán causales si son nulas para $t < 0^-$. De esta manera admitimos que las condiciones iniciales puedan ser distintas de cero, y que en general no sean coincidentes con los valores iniciales.

Este hecho plantea un problema a la hora de elegir la Transformada de Laplace unilateral que nos pueda resultar útil para resolver ecuaciones diferenciales de sistemas causales continuos. En lo que sigue se ha optado por la Transformada de Laplace unilateral $\mathcal{L}_-$ de tal modo que se conserve la idea de causalidad y se puedan tener en cuenta condiciones iniciales no nulas. Además se cumple que $\mathcal{L}_- \{\delta(t)\} = 1$ siendo $\delta(t)$ la función delta de Dirac, mientras que $\mathcal{L}_+ \{\delta(t)\} = 0$, lo que resulta un inconveniente en el estudio de la respuesta impulsiva de los sistemas.

Para las funciones discretas, sin embargo, no se presentan estos problemas, entendiéndose que para $k = 0$ se tiene tanto la condición inicial como el valor inicial. Sin embargo debido a que las señales son causales debe elegirse la Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral, sin distinguir si es por la derecha o por la izquierda. No obstante en la práctica, en los sistemas de control digital siempre se producirá algún retardo en el cálculo de las señales de control (señal excitadora), por lo que su efecto solo se apreciará un periodo de muestreo posterior. Posiblemente sería más conveniente considerar que el valor inicial se da en $k = 1$ y no en $k = 0$, aunque esto es discutible ya que la excitación suele realizarse nada más obtener el valor de la señal de control, sin esperar a que transcurra el periodo de muestreo. Este retardo no lo tendremos en cuenta en los estudios teóricos.

Definimos la función escalón unidad $r_0(t)$

$$r_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0^- \\ 1 & t \geq 0^- \end{cases} \tag{1.1}$$

La función escalón unidad discreta $r_0(kT)$, que en adelante escribiremos por comodidad de notación como $r_0(k)$, será entonces

$$r_0(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Si una función $f(t)$ es causal debe escribirse como $f(t)r_0(t)$,

$$f(t)r_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0^- \\ f(t) & t \geq 0^- \end{cases} \tag{1.3}$$

Supongamos que $f(t) = e^t$, entonces no es una función causal, ya que para $t < 0^-$ no es nula, pero sí será causal $\tilde{f}(t) = f(t)r_0(t)$. El valor inicial es $\tilde{f}(0^+) = f(0^+) = 1$. En este ejemplo, como $f(t)$ es una función continua, la condición inicial es $\tilde{f}(0^-) = f(0^-) = 1$.

Si una función $f(k)$ es causal debe escribirse como $f(k)r_0(k)$,

$$f(k)r_0(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ f(k) & k \geq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

También puede escribirse $f(t)r_0(k)$ en vez de $f(k)r_0(k)$, ya que el producto de una función continua por otra discreta da como resultado una función discretizada.

La función retardada de una función causal $f(t)r_0(t)$ se define de la siguiente manera,

$$f(t-t_0)r_0(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0^- \\ f(t-t_0) & t \geq t_0^- \end{cases} \tag{1.5}$$

donde $t_0 \geq 0$ representa el retardo.

Debe tenerse en cuenta que $f(t)r_0(t-t_0) \neq f(t-t_0)r_0(t-t_0)$, es decir que $f(t)r_0(t-t_0)$ no es una función retardada sino una función que se anula en el intervalo $[0, t_0)$:

$$f(t)r_0(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0^- \\ f(t) & t \geq t_0^- \end{cases} \tag{1.6}$$

También ocurre que $f(t-t_0)r_0(t) \neq f(t-t_0)r_0(t-t_0)$,

$$f(t-t_0)r_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0^- \\ f(t-t_0) & t \geq 0^- \end{cases} \tag{1.7}$$

Definimos la **Transformada $\mathcal{Z}$ inversa o Transformada $\mathcal{Z}^{-1}$ de la Transformada $\mathcal{Z}$** unilateral de una función $f(k)$ a la transformación $\mathcal{Z}^{-1}$ tal que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\mathcal{Z}\left\{f(k)\right\}\right\} = f(k)r_0(k) \tag{1.8}$$

donde $r_0(k)$ representa la función escalón unidad discreta.

Dada una función compleja cualquiera $F(z)$ no siempre existe su transformada $\mathcal{Z}^{-1}$, pero siempre existe, por definición, si $F(z)$ representa la transformada $\mathcal{Z}$ de alguna función $f(k)$. Además en este caso $f(k)r_0(k)$ es única.

En lo que sigue supondremos que dada $F(z)$ existe su transformada $\mathcal{Z}^{-1}\left\{F(z)\right\} = f(k)r_0(k)$.

Definimos de la misma forma la **Transformada de Laplace inversa de la Transformada $\mathcal{L}_-$** de una función $f(t)$,

$$\mathcal{L}_-^{-1}\left\{\mathcal{L}_-\left\{f(t)\right\}\right\} = f(t)r_0(t) \tag{1.9}$$

donde $r_0(t)$ representa la función escalón unidad continua.

2. Tabla de propiedades de las transformadas de Laplace unilateral y $\mathcal{Z}$

	$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$	
Teorema	Función	Transformada $\mathcal{Z}$
Linealidad	$\alpha_1 x(k) + \alpha_2 y(k)$	$\alpha_1 \mathcal{Z}\{x(k)\} + \alpha_2 \mathcal{Z}\{y(k)\}$
Desplazamiento real adelanto	$x(k+b)$	$z^b X(z) - \sum_{i=0}^{b-1} x(i) z^{b-i}$
Desplazamiento real atraso	$x(k-b)$	$z^{-b} X(z)$
Valor Final	$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\mathcal{Z}\{x(k)\}$	

Tabla 2.1: Propiedades de la Transformada $\mathcal{Z}$ unilateral

Teorema	Función	Transformada $\mathcal{L}_-$
	$X(s) = \mathcal{L}_-\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$	
Linealidad	$\alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t)$	$\alpha_1 \mathcal{L}_-\{x(t)\} + \alpha_2 \mathcal{L}_-\{y(t)\}$
Diferenciación	$\frac{d^b x(t)}{dt^b}$	$s^b X(s) - \sum_{i=1}^{b} s^{b-i} \frac{d^{i-1}x(t)}{dt^{i-1}}\Big\rvert_{t=0^-}$
Integración	$\int_{0^-}^{t} x(t)dt$	$\frac{X(s)}{s}$
Retardo	$x(t-t_0)r_0(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
Valor Final: si $x(t)$ es estable	$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\mathcal{L}_-\{x(t)\}$	
Valor Inicial	$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}_-\{x(t)\}$	

Tabla 2.2: Propiedades de la Transformada de Laplace unilateral $\mathcal{L}_-$

	$X(s) = \mathcal{L}_+\{x(t)\} = \int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$	
Teorema	Función	Transformada $\mathcal{L}_+$
Linealidad	$\alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t)$	$\alpha_1 \mathcal{L}_+\{x(t)\} + \alpha_2 \mathcal{L}_+\{y(t)\}$
Diferenciación	$\frac{d^b x(t)}{dt^b}$	$s^b X(s) - \sum_{i=1}^{b} s^{b-i} \frac{d^{i-1}x(t)}{dt^{i-1}}\Big\vert_{t=0^+}$
Integración	$\int_{0^+}^{t} x(t)dt$	$\frac{X(s)}{s}$
Retardo	$x(t-t_0)r_0(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
Valor Final: si $x(t)$ es estable	$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\mathcal{L}_+\{x(t)\}$	
Valor Inicial	$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}_+\{x(t)\}$	

Tabla 2.3: Propiedades de la Transformada de Laplace unilateral $\mathcal{L}_+$

3. Tabla de transformadas $\mathcal{L}_-$ y $\mathcal{Z}$ de sistemas de segundo orden, y sus derivados de primer orden

Transformada $\mathcal{L}_-$	Función (Discreto: $t = kT$)	Transformada $\mathcal{Z}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$	$\frac{Te^{-\alpha T}z}{\left(z-e^{-\alpha T}\right)^2}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$	$\frac{\left(z-(1+\alpha T)e^{-\alpha T}\right)z}{\left(z-e^{-\alpha T}\right)^2}$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{z}{z-1}$
1	$\delta(t)$	1
$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$	$e^{-\alpha_1 t}-e^{-\alpha_2 t}$	$\frac{\left(e^{-\alpha_1 T}-e^{-\alpha_2 T}\right)z}{\left(z-e^{-\alpha_1 T}\right)\left(z-e^{-\alpha_2 T}\right)}$
$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{\left(1-e^{-\alpha T}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-\alpha T}\right)}$
$\frac{(\alpha_2-\alpha_1)s}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$	$\alpha_2 e^{-\alpha_2 t}-\alpha_1 e^{-\alpha_1 t}$	$\frac{\left[z(\alpha_2-\alpha_1)-\left(\alpha_2 e^{-\alpha_1 T}-\alpha_1 e^{-\alpha_2 T}\right)\right]z}{\left(z-e^{-\alpha_1 T}\right)\left(z-e^{-\alpha_2 T}\right)}$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega_d t$	$\frac{\left(z-e^{-\alpha T}\cos\omega_d T\right)z}{z^2-2e^{-\alpha T}\cos(\omega_d T)z+e^{-2\alpha T}}$
$\frac{\omega_d}{(s+\alpha)^2+\omega_d^2}$	$e^{-\alpha t}\sin\omega_d t$	$\frac{e^{-\alpha T}\sin(\omega_d T)z}{z^2-2e^{-\alpha T}\cos(\omega_d T)z+e^{-2\alpha T}}$

Tabla 3.1: Transformadas $\mathcal{L}_-$ y $\mathcal{Z}$ de las funciones de segundo orden amortiguadas, y sus casos particulares de primer orden

A. Función delta de Kronecker

La función delta de Kronecker $\delta(k)$ se define de la siguiente manera

$$\delta(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases} \tag{A.1}$$

La función delta de Kronecker no se obtiene como discretización de la función (continua) delta de Dirac, pero sí es la discretización de un pulso unidad de anchura un periodo de muestreo $r_0(t) - r_0(t-T)$.

B. Transformadas $\mathcal{L}_-$ y $\mathcal{Z}$ de funciones monómicas

La Transformada $\mathcal{L}_-$ de las funciones monómicas causales $t^m r_0(t)$ con $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ es la siguiente:

$$\boxed{\mathcal{L}_- \{t^m r_0(t)\} = \frac{m!}{s^{m+1}}} \tag{B.1}$$

La Transformada $\mathcal{Z}$ de las funciones monómicas causales $k^m r_0(k)$ con $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ es la siguiente:

$$\boxed{\mathcal{Z} \{k^m r_0(k)\} = \frac{z \sum_{j=0}^{m-1} A(m,j) z^j}{(z-1)^{m+1}}} \tag{B.2}$$

siendo $A(m,j)$ los números eulerianos definidos a continuación.

Los números eulerianos satisfacen la ecuación recursiva

$$A(m,j) = jA(m-1,j) + mA(m,j-1) \tag{B.3}$$

que explícitamente tienen la forma

$$A(m,j) = \sum_{i=0}^{j+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} (j-i+1)^m \tag{B.4}$$

donde $\binom{m+1}{i}$ representa el coeficiente binomial, $\binom{m}{i} = \dfrac{m!}{i!(m-i)!}$.

En la Tabla B.1 se muestran algunos valores del triángulo de números eulerianos.

m	j: 0	1	2	3	4
0	1				
1	1				
2	1	1			
3	1	4	1		
4	1	11	11	1	
5	1	26	66	26	1

Tabla B.1: Números eulerianos $A(m,j)$