

Sistemas muestreados

Félix Monasterio-Huelin

8 de febrero de 2016

Índice

Índice	1
Índice de Figuras	1
Índice de Tablas	1
1. Muestreador ideal y relación entre s y z	2
2. Muestreo de Sistemas en serie	4
3. ZOH: dispositivo de retención de orden cero	5
4. Discretización de Funciones de Transferencia	7
4.1. Discretización a la entrada escalón o equivalencia ZOH	8
4.2. Discretización por aproximación lineal de $z = e^{Ts}$ o por aproximación discreta de la integral	9
4.3. Discretización por igualación de ceros y polos	11
4.3.1. Ceros en el infinito con $z = -1$	12
4.3.2. Ceros en el infinito con $z = \infty$	12
5. Discretización de un Controlador PI por el método de Euler en atraso	13
6. Discretización de un Controlador PD ideal por el método de Euler en atraso	13
7. Discretización de un Controlador PID ideal por el método de Euler en atraso	13

Índice de Figuras

1.1. Muestreo de $x(t)$ con un tren de impulsos $\Delta_T(t)$	2
1.2. Muestreador ideal	2
1.3. Características de la transformación $z = e^{sT}$. (a) Franjas periódicas en el Plano s (Los puntos P1a,P1b,P1c se transforman en P1,etc)(b) Círculo unidad en el Plano z	3
1.4. Muestreador ideal con un prefiltro	4
3.1. Retención de Orden Cero	5
3.2. Sistema en Lazo Abierto Continuo	5
3.3. Sistema en Lazo Abierto Híbrido con un ZOH	5
4.1. Estructura de Control de Lazo Directo Híbrido	7

Índice de Tablas

4.1. Métodos de discretización por aproximación lineal de $z = e^{Ts}$	9
--	---

1. Muestreador ideal y relación entre s y z

Definimos un muestreador ideal como un dispositivo que modula una señal continua con un tren de impulsos (tren de deltas de Dirac, Dirac comb en inglés) $\Delta_T(t)$. La salida del muestreador ideal es una señal muestreada.

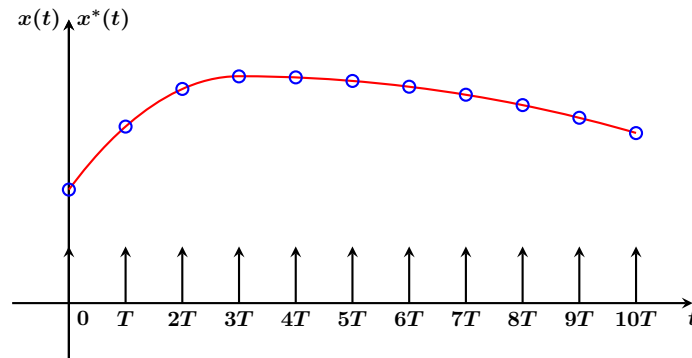


Figura 1.1: Muestreo de $x(t)$ con un tren de impulsos $\Delta_T(t)$

El tren de impulsos se define de la siguiente forma:

$$\Delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (1.1)$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac.

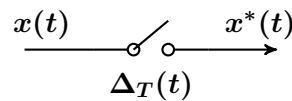


Figura 1.2: Muestreador ideal

Sea $x(t)$ la entrada al muestreador ideal y $x^*(t)$ su salida (que se lee como "x(t) estrella") (Ver Figuras 1.1 y 1.2). Se cumple que

$$x^*(t) = \Delta_T(t)x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \quad (1.2)$$

Obteniendo la Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{x^*(t)\}$ vemos que

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \quad (1.3)$$

La discretización exacta de $x(t)$ es $x(kT)$, y su transformada $\mathcal{Z}\{x(kT)\}$ viene dada por

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} \quad (1.4)$$

Comparando las expresiones 1.3 y 1.4 vemos que la relación entre s y z cuando se muestrea una señal continua con un muestreador ideal es

$$z = e^{sT} \quad (1.5)$$

Por lo tanto

$$X(z) = X^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T}Ln(z)} \quad (1.6)$$

Una característica de la relación entre s y z es que $z = e^{sT}$ es periódica, ya que si $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ entonces

$$z = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j(\omega T + 2n\pi)} \quad (1.7)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ y $z = \sigma_D + j\omega_D$.

Esto puede comprobarse mediante la relación o fórmula de Euler dada por

$$e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + j \sin(\omega T) \quad (1.8)$$

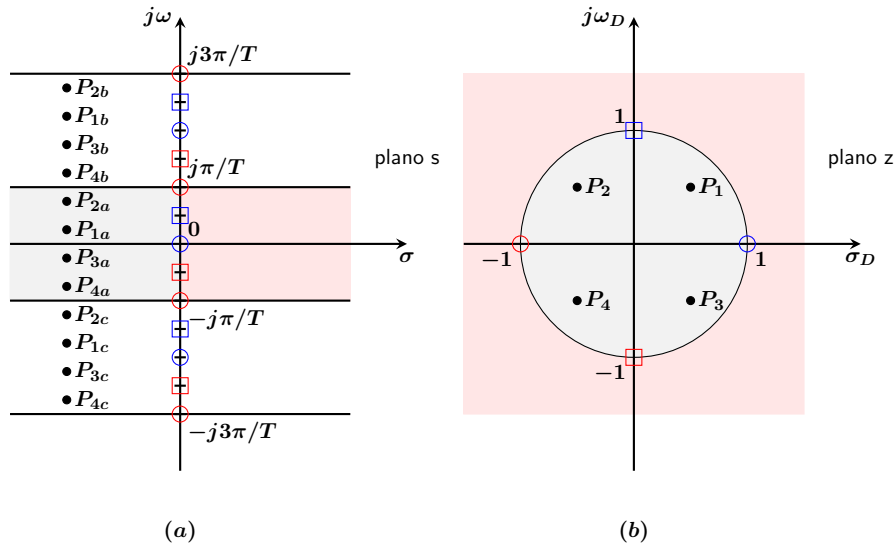


Figura 1.3: Características de la transformación $z = e^{sT}$. (a) Franjas periódicas en el Plano s (Los puntos P_{1a}, P_{1b}, P_{1c} se transforman en P_1 , etc)(b) Círculo unidad en el Plano z

Otra característica cuya importancia está relacionada con la estabilidad de los sistemas, es que para valores de $\sigma < 0$ se obtienen valores de $|\sigma_D| < 1$. Es decir que puntos pertenecientes al semiplano izquierdo del plano complejo s se transforman mediante $z = e^{sT}$ en puntos del interior del círculo unidad del plano complejo z . Los puntos del eje imaginario $s = j\omega$ del plano complejo s se transforman en puntos de la circunferencia unidad $z = e^{j\omega T}$, o $|z| = 1$ del plano complejo z como se muestra en la Figura 1.3(b).

La periodicidad de $z = e^{Ts}$ da lugar a franjas periódicas en el plano complejo s cuando se muestrea una señal continua. Se denomina franja principal al intervalo de ω que se transforma en puntos que recorren una sola vez todos los puntos del plano z . Esto ocurre para los valores de ω siguientes:

$$\omega \in \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right] \quad (1.9)$$

Se denominan franjas complementarias a las restantes como se muestra en la Figura 1.3(a). Cada punto de la franja complementaria también recorre una sola vez todos los puntos del plano z , por lo que queda claro que son redundantes en la representación discreta, pero no pueden obviarse en el proceso de muestreo ya que realmente las frecuencias continuas pueden estar en cualquiera de las franjas. Este hecho plantea el problema de solapamiento o de enmascaramiento de frecuencias (aliasing en inglés) cuando se muestrea una señal continua.

La anchura de la franja principal ω_s depende del periodo de muestreo T , de hecho $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, por lo que para evitar el fenómeno de solapamiento de frecuencias, deberá elegirse T de tal manera que la franja principal abarque la máxima frecuencia de trabajo del sistema continuo. Esta exigencia de que el intervalo de frecuencia de la señal continua sea de banda limitada se conoce como criterio de Shannon, y la frecuencia máxima en que no se produce solapamiento se denomina frecuencia de Nyquist ω_N ,

$$\omega_N = \frac{\omega_s}{2} \quad (1.10)$$

donde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

Por desgracia la mayoría de las señales continuas no son de banda limitada por lo que debe realizarse un prefiltrado de estas señales antes de realizar su muestreo. En la Figura 1.4 se muestra esta idea.

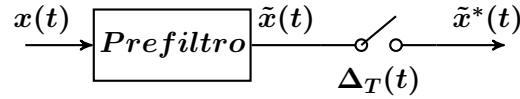


Figura 1.4: Muestreador ideal con un prefiltrado

2. Muestreo de Sistemas en serie

Una característica del muestreo de sistemas en serie $G_1(s)$ y $G_2(s)$ que debe tenerse en cuenta es que

$$[G_1(s)G_2(s)]^* \neq G_1^*(s)G_2^*(s) \quad (2.1)$$

Por comodidad de notación escribiremos

$$\mathcal{Z}\{G(s)\} = G^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T}\text{Ln}(z)} = G(z) \quad (2.2)$$

Lo que significa esta relación es lo siguiente,

$$\mathcal{Z}\{G(s)\} = \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\} = \mathcal{Z}\{g(t)\} = \mathcal{Z}\{g(kT)\} = G(z) \quad (2.3)$$

Por lo tanto la desigualdad dada por 2.1 implica que

$$\mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\} \neq G_1(z)G_2(z) \quad (2.4)$$

Para evitar cometer errores en las operaciones con muestreadores emplearemos la notación $G_1(s)G_2(s) = G_1G_2(s)$ y $\mathcal{Z}\{G_1G_2(s)\} = G_1G_2(z)$.

Sin embargo se satisface la siguiente igualdad:

$$\mathcal{Z}\{G_1(s)G_2^*(s)\} = G_1(z)G_2(z) \quad (2.5)$$

Esto es así porque $(G_1(s)G_2^*(s))^* = G_1^*(s)G_2(s)$.

Veamos un ejemplo de la desigualdad 2.4. Sean las siguientes funciones de transferencia,

$$G_1(s) = \frac{1}{s} \quad (2.6a)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s+a} \quad (2.6b)$$

Teniendo en cuenta el procedimiento 2.3 se obtienen las Transformadas \mathcal{Z} de ellas,

$$\mathcal{Z}\{G_1(s)\} = G_1(z) = \frac{z}{z-1} \quad (2.7a)$$

$$\mathcal{Z}\{G_2(s)\} = G_2(z) = \frac{z}{z-e^{-aT}} \quad (2.7b)$$

Descomponiendo el producto en fracciones simples

$$G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right) \quad (2.8)$$

Calculando ahora su Transformada \mathcal{Z} puesto que es lineal,

$$G_1G_2(z) = \frac{1}{a} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \right) = \frac{(1-e^{-aT})z}{a(z-1)(z-e^{-aT})} \quad (2.9)$$

Sin embargo el producto de las relaciones 2.7a y 2.7b es

$$G_1(z)G_2(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-aT})} \quad (2.10)$$

3. ZOH: dispositivo de retención de orden cero

Un ZOH (Zero Order Hold) es un dispositivo cuya entrada es una señal muestreada y su salida una señal continua obtenida por extrapolación de un polinomio de orden cero en cada intervalo de muestreo $[kT, (k + 1)T)$, como se muestra en la Figura 3.1.

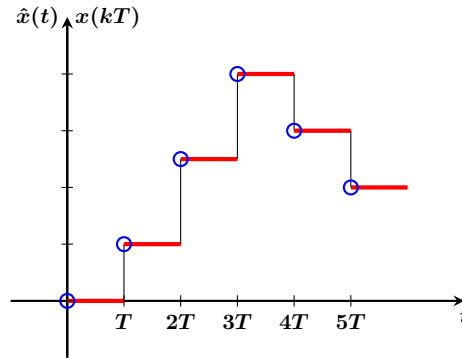


Figura 3.1: Retención de Orden Cero

Si $x(kT)$ es la señal de entrada, la salida $\hat{x}(t)$ es una combinación de señales escalón retardadas

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) (r_0(t - kT) - r_0(t - (k + 1)T)) \quad (3.1)$$

donde $r_0(t)$ es la función escalón unidad.

La transformada de Laplace $\mathcal{L}_- \{ \hat{x}(t) \}$ es

$$\hat{X}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left(\frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-(k+1)Ts}}{s} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (3.2)$$

Esta expresión puede escribirse en la forma

$$\hat{X}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s) \quad (3.3)$$

donde $X^*(s)$ representa la señal obtenida con un muestreador ideal.

En consecuencia la función de transferencia del ZOH es

$$G_{ZOH}(s) = \frac{\hat{X}(s)}{X^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (3.4)$$

Las Figuras 3.2 y 3.3 muestran los esquemas de bloques de un sistema en lazo abierto continuo y su correspondiente híbrido con un ZOH.

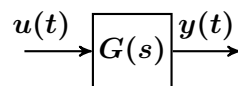


Figura 3.2: Sistema en Lazo Abierto Continuo

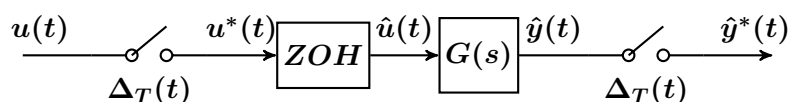


Figura 3.3: Sistema en Lazo Abierto Híbrido con un ZOH

Teniendo en cuenta el procedimiento dado por 2.3 puede comprobarse que la función de transferencia $\mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\}$ es

$$\mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \quad (3.5)$$

ya que para cualquier función $G'(s)$ se cumple que

$$\mathcal{Z}\{e^{-Ts}G'(s)\} = \mathcal{Z}\{g'(t - T)\} = \mathcal{Z}\{g'(kT - T)\} = z^{-1}G'(z) \quad (3.6)$$

4. Discretización de Funciones de Transferencia

Dada una función de transferencia continua $G(s)$ deseamos obtener una función de transferencia discreta $G_D(z)$ que satisfaga al menos las siguientes dos condiciones:

1. Que $G_D(z)$ represente un sistema lineal discreto.
2. Que se satisfaga la restricción de igualdad de ganancia a bajas frecuencias, es decir que

$$G_D(z)\Big|_{z=1} = G(s)\Big|_{s=0} \quad (4.1)$$

En algunas aplicaciones puede ser conveniente cambiar la restricción de ganancia a bajas frecuencias por la de ganancia a alguna otra frecuencia de interés, como el centro de una banda de frecuencias de trabajo o algún punto crítico $s = s^*$ y $z = z^* = e^{s^*T}$.

Realmente lo que sería deseable es que $G_D(z)$ fuese una discretización exacta de $G(s)$ para cualquier entrada $u(t)$, en el sentido de que el sistema discretizado tenga la misma salida $y(t)$ de $G(s)$ en los instantes de muestreo, $y(kT)$, cuando la entrada del sistema discreto sea la discretización de $u(t)$, es decir $u(kT)$. Pero es imposible lograr esto salvo que $G_D(z)$ no represente un sistema discreto lineal. La razón de esto es debida a que la relación $z = e^{sT}$ no es lineal. Sin embargo sí podrá lograrse para alguna entrada particular, aunque no para cualquier entrada.

Por otro lado observemos el sistema de lazo abierto híbrido de la Figura 3.3. Si el ZOH realizase una reconstrucción exacta de la señal muestreada $x^*(t)$, es decir si su salida fuese $x(t)$, entonces el sistema $G(s)$ tendría la misma entrada y en consecuencia la misma salida $y(t)$. Por desgracia no es posible hacer físicamente una reconstrucción exacta de una señal muestreada, aunque teóricamente pueda lograrse con un filtro paso bajo ideal, que no es causal. El ZOH representa una aproximación causal de este filtro.

Por otro lado, el cumplimiento de las dos condiciones anteriores será un requisito de diseño necesario, pero normalmente se exigen condiciones adicionales. Por ejemplo si el sistema continuo es estable o inestable, su equivalente discreto debería ser también estable o inestable. O también sería deseable que si el sistema continuo tuviese un comportamiento oscilatorio para una determinada entrada, también lo tuviese su equivalente discreto. En definitiva, sería deseable que cualquier discretización conserve las propiedades cualitativas del sistema continuo.

También sería deseable establecer alguna equivalencia en el comportamiento de los sistemas de control realimentado continuo y discretizado. Por lo tanto será necesario estudiar la discretización $H_D(z)$ de la función de transferencia de lazo cerrado continua $H(s)$. Sin embargo en la práctica aparece una dificultad adicional, ya que nos encontraremos con diseños de sistemas de control híbridos como el de la Figura 4.1, sistemas de control en los que el sistema a controlar $G(s)$ es continuo mientras que el controlador $G_c(z)$ es discreto aunque la entrada $r(k)$ sea una discretización exacta de una señal continua $r(t)$.

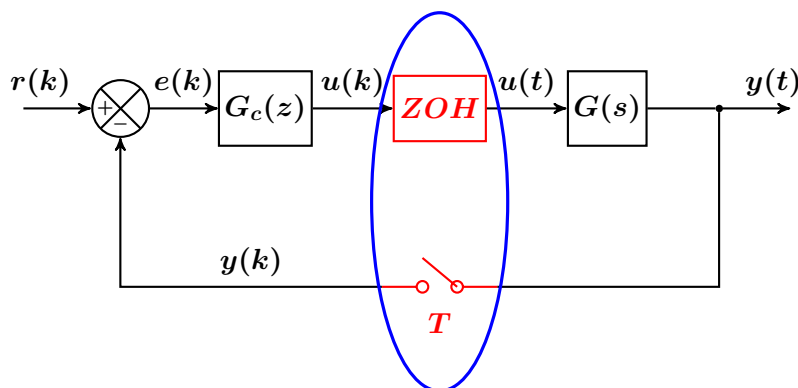


Figura 4.1: Estructura de Control de Lazo Directo Híbrido

En las siguientes subsecciones estudiaremos tres formas de discretización que, en general, dan lugar a funciones de transferencia discretizadas distintas:

1. Discretización exacta a señales de entrada particulares (4.1).
2. Discretización por aproximación lineal de la relación $z = e^{sT}$ (4.2).
3. Discretización por igualación de ceros y polos (4.3).

4.1. Discretización a la entrada escalón o equivalencia ZOH

En general no solo las salidas $y(t)$ e $\hat{y}(t)$ de las Figuras 3.2 y 3.3 son distintas, sino que también son distintos los valores de $y(t)$ y de $\hat{y}(t)$ en los instantes de muestreo, es decir que

$$y(t) \neq \hat{y}(t) \quad (4.2a)$$

$$y^*(t) \neq \hat{y}^*(t) \quad (4.2b)$$

La primera desigualdad es evidente ya que $u(t) \neq \hat{u}(t)$. Comprobaremos la segunda con un ejemplo.

Las desigualdades 4.2a y 4.2b pueden escribirse aplicando la Transformada de Laplace y la Transformada \mathcal{Z} como

$$Y(s) \neq \hat{Y}(s) \quad (4.3a)$$

$$Y(z) \neq \hat{Y}(z) \quad (4.3b)$$

Supongamos que

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \quad (4.4a)$$

$$u(t) = e^{-bt}r_0(t) \quad (4.4b)$$

donde $r_0(t)$ es la función escalón unidad.

Por un lado sabemos que

$$U(s) = \frac{1}{s+b} \quad (4.5a)$$

$$U(z) = \frac{z}{z - e^{-bT}} \quad (4.5b)$$

Por otro lado puede comprobarse que

$$G(s)U(s) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \right) \quad (4.6a)$$

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right) \quad (4.6b)$$

De aquí que

$$\mathcal{Z} \{G(s)U(s)\} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{z}{z - e^{-aT}} - \frac{z}{z - e^{-bT}} \right) \quad (4.7a)$$

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{1}{a} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} \right) \quad (4.7b)$$

que puede simplificarse a la forma

$$\mathcal{Z} \{G(s)U(s)\} = \frac{e^{-aT} - e^{-bT}}{b-a} \frac{z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})} \quad (4.8a)$$

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \frac{1 - e^{-aT}}{a} \frac{z}{(z - e^{-aT})(z - 1)} \quad (4.8b)$$

Por último, teniendo en cuenta 3.5, podemos comprobar que la desigualdad 4.3b es correcta:

$$Y(z) = \mathcal{Z} \{G(s)U(s)\} = \frac{e^{-aT} - e^{-bT}}{b-a} \frac{z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})} \quad (4.9a)$$

$$\hat{Y}(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} U(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{a} \frac{z}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})} \quad (4.9b)$$

Solamente en el caso en que $b = 0$, es decir cuando la entrada sea un escalón se dará $Y(z) = \hat{Y}(z)$. Puede comprobarse que esto siempre es así para cualquier función de transferencia $G(s)$ y no solo para la del ejemplo. Por esta razón la función de transferencia dada por 3.5 puede considerarse una discretización exacta $G_{D0}(z)$ de $G(s)$ para una entrada escalón:

$$G_{D0}(z) = \mathcal{Z} \{G_{ZOH}(s)G(s)\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (4.10)$$

Podemos ver en el ejemplo anterior ($G(s) = \frac{1}{s+a}$) que la discretización a la entrada escalón no coincide con la Transformada \mathcal{Z} de $G(s)$,

$$G_{D0}(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{a} \frac{1}{z - e^{-aT}} \quad (4.11a)$$

$$G(z) = \mathcal{Z} \{G(s)\} = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (4.11b)$$

Podemos comprobar también que para la discretización a la entrada escalón se cumple la restricción de igualdad de ganancia a bajas frecuencias dada por 4.1: $G(s=0) = G_{D0}(z=1)$.

4.2. Discretización por aproximación lineal de $z = e^{Ts}$ o por aproximación discreta de la integral

La idea de la discretización por aproximación lineal de $z = e^{Ts}$ es obtener funciones de transferencia discretizadas $G_D(z)$ de $G(s)$ substituyendo la variable compleja s por una función racional lineal de la variable compleja z obtenida como aproximación racional lineal de la igualdad $z = e^{Ts}$.

Veamos tres métodos en los que obtendremos la ecuación en diferencias discretizada de la ecuación diferencial siguiente

$$\dot{y}(t) = u(t) \quad (4.12)$$

con la condición inicial $[y(0^-)]$.

La función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (4.13)$$

La solución de la ecuación diferencial dada por 4.12 es

$$y(t) = y(0^-) + \int_{0^-}^t u(t)dt \quad (4.14)$$

En la Tabla 4.1 se resumen estos métodos. Podemos ver que todos ellos tienen en el numerador el factor $z - 1$, por lo que $G(s=0) = G_D(z=1)$, es decir que satisfacen la restricción de ganancia a bajas frecuencias.

Método		
Euler	$z = 1 + Ts$	$s = \frac{z-1}{T}$
Euler en atraso	$z = \frac{1}{1 - Ts}$	$s = \frac{z-1}{Tz}$
Tustin	$z = \frac{1 + \frac{1}{2}Ts}{1 - \frac{1}{2}Ts}$	$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

Tabla 4.1: Métodos de discretización por aproximación lineal de $z = e^{Ts}$

1. Método de Euler.

La función exponencial e^{sT} puede escribirse como un desarrollo en serie de Taylor alrededor de $s = 0$,

$$e^{Ts} = 1 + Ts + \frac{1}{2}(Ts)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i e^{sT}}{\partial s^i} \Big|_{s=0} s^i \quad (4.15)$$

Quedándose con el término de primer orden en s

$$e^{Ts} \approx 1 + Ts \quad (4.16)$$

se obtiene el método de Euler

$$z = 1 + Ts \quad (4.17)$$

Por lo tanto dado $G(s)$ puede calcularse $G_D(z)$ sustituyendo s por la relación 4.17, e imponiendo la restricción de ganancia a bajas frecuencias:

$$G_D(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} \quad (4.18)$$

La función de transferencia discretizada de 4.13 es

$$G_D(z) = \frac{T}{z-1} \quad (4.19)$$

Y la ecuación en diferencias equivalente es

$$y(k+1) - y(k) = Tu(k) \quad (4.20)$$

con la condición inicial $[y(0)]$.

2. Método de Euler en atraso.

La función exponencial e^{sT} puede escribirse como

$$e^{Ts} = \frac{1}{e^{-Ts}} = \frac{1}{1 - Ts + \frac{1}{2}(Ts)^2 - \dots} \quad (4.21)$$

El método de Euler en atraso consiste en hacer

$$z = \frac{1}{1 - Ts} \quad (4.22)$$

De aquí que

$$G_D(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} \quad (4.23)$$

La función de transferencia discretizada de 4.13 es

$$G_D(z) = \frac{Tz}{z-1} \quad (4.24)$$

Y la ecuación en diferencias equivalente es

$$y(k+1) - y(k) = Tu(k+1) \quad (4.25)$$

con la condición inicial $[y(0), u(0)]$.

3. Método de Tustin o transformación bilineal.

La función exponencial e^{sT} puede escribirse como

$$e^{Ts} = \frac{e^{\frac{Ts}{2}}}{e^{-\frac{Ts}{2}}} = \frac{1 + \frac{1}{2}Ts + \dots}{1 - \frac{1}{2}Ts + \dots} \quad (4.26)$$

El método de Tustin o de la transformación bilineal consiste en hacer

$$z = \frac{1 + \frac{1}{2}Ts}{1 - \frac{1}{2}Ts} \quad (4.27)$$

De aquí que

$$G_D(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} \quad (4.28)$$

La función de transferencia discretizada de 4.13 es

$$G_D(z) = \frac{Tz + 1}{2z - 1} \quad (4.29)$$

Y la ecuación en diferencias equivalente es

$$y(k+1) - y(k) = \frac{T}{2}u(k+1) + \frac{T}{2}u(k) \quad (4.30)$$

con la condición inicial $[y(0), u(0)]$.

Como puede verse en el ejemplo, a través de la solución 4.14 de la ecuación diferencial 4.12, al resolver las ecuaciones en diferencias equivalentes se obtendría una aproximación de la integral de la entrada $u(t)$.

4.3. Discretización por igualación de ceros y polos

La idea de igualación de ceros y polos para obtener una discretización $G_D(z)$ de una función de transferencia continua $G(s)$ es substituir cada uno de los ceros c y polos p de $G(s)$ por ceros c_D y polos p_D en $G_D(z)$ mediante la transformación $z = e^{Ts}$:

$$p_D = e^{pT} \quad (4.31a)$$

$$c_D = e^{cT} \quad (4.31b)$$

Es necesario también tener en cuenta todos los ceros en el infinito de $G(s)$ cuando el orden relativo es mayor que cero, es decir el cero o ceros cuando $s = \infty$. Esto puede hacerse incluyendo ceros en $z = -1$ o en $z = \infty$. A continuación se explica la razón de cada una de estas posibles elecciones.

Por último debe imponerse la restricción de ganancia a bajas frecuencias dada por 4.1.

Supongamos que

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \quad (4.32)$$

entonces obtenemos dos posibles discretizaciones, según que se escoja una u otra forma de igualar el cero en el infinito:

$$G_D(z) = \frac{(1 - e^{-aT})(z+1)}{2a(z - e^{-aT})} \quad (c_D = -1) \quad (4.33a)$$

$$G_D(z) = \frac{1 - e^{-aT}}{a(z - e^{-aT})} \quad (c_D = \infty) \quad (4.33b)$$

Puede observarse que mediante la primera discretización obtenida haciendo $z = -1$ en los ceros del infinito siempre se obtiene una función de transferencia $G_D(z)$ de orden relativo nulo. Sin embargo haciendo $z = \infty$ se conserva el orden relativo de $G(s)$.

4.3.1. Ceros en el infinito con $z = -1$

Como se comentó en la Sección 1, la relación $z = e^{sT}$ es periódica (ver relación 1.7) por lo que puede hacerse el siguiente razonamiento.

Mientras que $s = \sigma + j\omega$ es el máximo valor de frecuencia del caso continuo, el máximo valor para el caso discreto será $\omega = \frac{\pi}{T}$ debido a la periodicidad. Teniendo en cuenta este hecho puede hacerse la igualación de polos en el infinito con $s = \frac{(2n+1)\pi}{T}$, por lo que $z = e^{j(2n+1)\pi} = -1$, donde $n \in \mathbb{Z}$.

4.3.2. Ceros en el infinito con $z = \infty$

Para explicar por qué puede ser conveniente transformar los ceros en el infinito continuos por ceros en $z = \infty$ analizaremos las dos formas de discretización del ejemplo anterior dadas por 4.33a y 4.33b.

La ecuación diferencial cuya función de transferencia viene dada por 4.32 es

$$\dot{y}(t) + ay(t) = u(t) \quad (4.34)$$

Las ecuaciones en diferencias cuya función de transferencia vienen dadas por 4.33a y 4.33b son respectivamente

$$y(k+1) - e^{-aT}y(k) = \frac{1 - e^{-aT}}{2a} (u(k+1) + u(k)) \quad (4.35a)$$

$$y(k+1) - e^{-aT}y(k) = \frac{1 - e^{-aT}}{a} u(k) \quad (4.35b)$$

El hecho de que aparezca el término de entrada en $u(k+1)$ en la ecuación 4.35a es problemático ya que exige que el sistema tenga una respuesta instantánea para poder conocer $y(k+1)$.

En la práctica de los sistemas de control digital esto no puede ocurrir, ya que el cálculo o computo de $y(k+1)$ necesita un tiempo que puede ser tan largo como un periodo de muestreo (en realidad se calcula $y(k)$ con las ecuaciones en diferencias expresadas en la forma programable o en atraso. Si este fuese el caso conviene utilizar esta forma de discretización de los ceros en el infinito. Si por el contrario, se supone que el tiempo de cálculo de $y(k+1)$ es muy pequeño en relación al periodo de muestreo, puede utilizarse la discretización $z = -1$ de los ceros en el infinito.

5. Discretización de un Controlador PI por el método de Euler en atraso

El controlador PI continuo tiene la forma integral

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right) \quad (5.1)$$

Derivando esta ecuación se obtiene la ecuación diferencial siguiente:

$$\dot{u}(t) = K_p \left(\dot{e}(t) + \frac{1}{\tau_I} e(t) \right) \quad (5.2)$$

Utilizando el método de discretización de Euler en atraso se obtiene la ecuación en diferencias

$$\frac{u(k) - u(k-1)}{T} = K_p \left(\frac{e(k) - e(k-1)}{T} + \frac{1}{\tau_I} e(k) \right) \quad (5.3)$$

que puede escribirse en la forma

$$u(k) = u(k-1) + K_p \left(\left(1 + \frac{T}{\tau_I} \right) e(k) - e(k-1) \right) \quad (5.4)$$

La función de transferencia del Controlador PI discretizado es,

$$G_{PI,D}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left(1 + \frac{T}{\tau_I} \frac{z}{z-1} \right) \quad (5.5)$$

6. Discretización de un Controlador PD ideal por el método de Euler en atraso

El controlador PD continuo ideal tiene la forma diferencial

$$u(t) = K_p (e(t) + \tau_D \dot{e}(t)) \quad (6.1)$$

Utilizando el método de discretización de Euler en atraso se obtiene la ecuación en diferencias

$$u(k) = K_p \left(e(k) + \frac{\tau_D}{T} (e(k) - e(k-1)) \right) \quad (6.2)$$

que puede escribirse en la forma

$$u(k) = K_p \left(\left(1 + \frac{\tau_D}{T} \right) e(k) - \frac{\tau_D}{T} e(k-1) \right) \quad (6.3)$$

La función de transferencia del Controlador PD ideal discretizado es,

$$G_{PD,D}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left(1 + \frac{\tau_D}{T} \frac{z-1}{z} \right) \quad (6.4)$$

7. Discretización de un Controlador PID ideal por el método de Euler en atraso

El controlador PID continuo tiene la forma integral

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \tau_D \dot{e}(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(\tau) d\tau \right) \quad (7.1)$$

Derivando esta ecuación se obtiene la ecuación diferencial siguiente:

$$\dot{u}(t) = K_p \left(\dot{e}(t) + \tau_D \ddot{e}(t) + \frac{1}{\tau_I} e(t) \right) \quad (7.2)$$

Teniendo en cuenta que $\ddot{e}(t)$ puede discretizarse por el método de Euler en atraso como

$$\ddot{e}(t) \approx \left(\frac{\frac{e(k) - e(k-1)}{T} - \frac{e(k-1) - e(k-2)}{T}}{T} \right) \quad (7.3)$$

la discretización del PID resulta en la siguiente ecuación en diferencias

$$\frac{u(k) - u(k-1)}{T} = K_p \left(\frac{e(k) - e(k-1)}{T} + \tau_D \frac{e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)}{T^2} + \frac{1}{\tau_I} e(k) \right) \quad (7.4)$$

que puede escribirse en la forma

$$u(k) = u(k-1) + K_p \left(\left(1 + \frac{\tau_D}{T} + \frac{T}{\tau_I} \right) e(k) - \left(1 + \frac{2\tau_D}{T} \right) e(k-1) + \frac{\tau_D}{T} e(k-2) \right) \quad (7.5)$$

La función de transferencia del Controlador PID discretizado es,

$$G_{PID,D}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left(1 + \frac{\tau_D}{T} \frac{z-1}{z} + \frac{T}{\tau_I} \frac{z}{z-1} \right) \quad (7.6)$$

Es habitual representar la función de transferencia del Controlador PID discretizado en la forma,

$$G_{PID,D}(z) = K_p + \frac{K_i}{1 - z^{-1}} + K_d (1 - z^{-1}) \quad (7.7)$$

donde

$$K_d = \frac{K_p \tau_D}{T} \quad (7.8a)$$

$$K_i = \frac{K_p T}{\tau_I} \quad (7.8b)$$