

Introducción a los Sistemas Hápticos

Félix Monasterio-Huelin

22 de noviembre de 2016

Índice

Índice	1
Índice de Figuras	1
1. Introducción	3
2. Motor DC	4
3. Modelo de carga de un motor DC de un grado de libertad	5
4. Incorporación de una fuerza externa al modelo del motor con carga	7
5. Control de par calculado	8
6. Diseño de un controlador para compensar el par gravitatorio	9
7. Introducción a la realimentación háptica	13
8. Modelo virtual de muelle de torsión y fricción viscosa	15
9. Sistema háptico con un dispositivo háptico de un grado de libertad y un muelle de torsión con fricción viscosa virtual	19
A. Modelo CVS de fricción de un motor DC	24
B. Tensor de inercia y centro de masas del sólido rígido	25
C. Energía cinética del sólido rígido	27
D. Energía potencial del sólido rígido	28
E. Ecuaciones dinámicas de un mecanismo de sólidos rígidos	28
F. Ecuaciones dinámicas en el espacio cartesiano	30
G. Coeficientes de la matriz $C(q, \dot{q})$ de las ecuaciones dinámicas, y algunas propiedades estructurales	30
Bibliografía	36

Índice de Figuras

1.1. Componentes de un sistema háptico	3
1.2. Fuerza aplicada al extremo del dispositivo háptico	3
2.1. MotorDC	4

3.1. Eje, Reductora y Carga del MotorDC	5
5.1. Esquema de control de posición de par calculado	9
6.1. Esquema de control de compensación del par gravitacional basado en la técnica de par calculado	10
6.2. Esquema de control de compensación del par gravitacional	11
7.1. Esquema de bloques simplificado de un sistema con realimentación háptica	13
7.2. Dispositivo de retención de orden cero (ZOH): $x(kT)$ es la entrada (azul) y $\hat{x}(t)$ la salida (rojo)	14
9.1. Sistema háptico con compensación del par gravitacional de un grado de libertad	19
9.2. Sistema háptico con compensación del par gravitacional de un grado de libertad	20
9.3. Introducción de un Acoplo Virtual	23
A.1. Par de fricción dado por A.5 en función de $\dot{\theta}_m$	24

1. Introducción

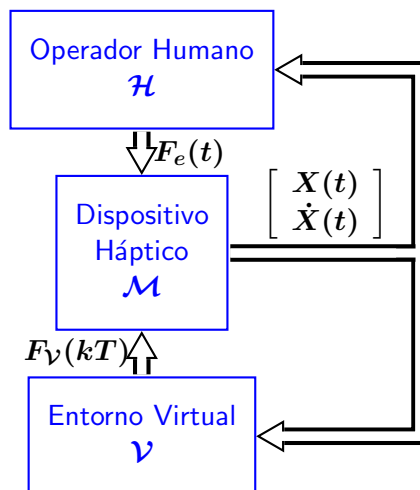


Figura 1.1: Componentes de un sistema háptico

El objetivo de este documento es introducir los sistemas hápticos. Para ello se desarrollarán las ecuaciones dinámicas de sus componentes más importantes y se demostrarán algunas características de su funcionamiento. En la Figura 1.1 se muestran dichos componentes y su interrelación, donde $F_e(t)$ y $F_V(kT)$ representan fuerzas variables con el tiempo continuo y discreto, respectivamente, y $X(t)$, $\dot{X}(t)$ representa la posición y velocidad del extremo del dispositivo háptico o robot.

El estudio que se va a hacer se ha limitado a robots de un único grado de libertad, que constan de un motor DC y de una carga rígida acoplada a él a través de una reductora. En la Sección 2 se presentan las ecuaciones dinámicas del motor DC y en la Sección 3 la ecuación dinámica de la carga utilizando la formulación de Euler-Lagrange, así como su incorporación a la ecuación simplificada del motor DC.

En la Sección 4 se obtienen las ecuaciones del efecto en el robot de aplicar una fuerza externa al extremo del robot, pero en el caso en que no se produzca una realimentación háptica, es decir, sin que exista el lazo de realimentación entre el dispositivo háptico y el operador humano dibujado en la Figura 1.1, ni exista el entorno virtual. En esta situación se introduce un sistema de control de posición en la Sección 5 y un sistema de control, en la Sección 6, que permite compensar el par gravitatorio del dispositivo háptico cuando deja de aplicarse la fuerza externa. La idea de este estudio es explicar cómo puede diseñarse un sistema de control que permita realizar dos funciones: por un lado, que el operador humano pueda mover el extremo del dispositivo háptico aplicando una fuerza, y por otro lado, que el dispositivo háptico no se mueva cuando deje de aplicarse tal fuerza. La técnica de control que se explica en la Sección 5 se denomina de par calculado. La razón para introducir esta técnica es porque permite realizar los estudios del resto del documento como si el sistema háptico fuese un sistema lineal, lo cual facilita el análisis y permite visualizar, de manera sencilla, algunas características del funcionamiento de los sistemas hápticos de más de un grado de libertad.

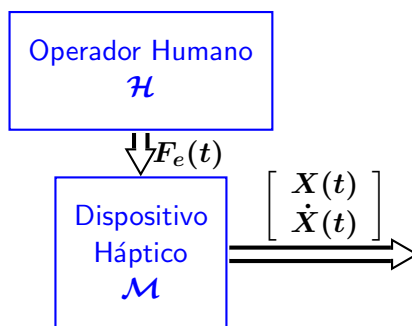


Figura 1.2: Fuerza aplicada al extremo del dispositivo háptico

Hasta aquí, lo que realmente se ha estudiado es lo que está representado en la Figura 1.2, donde la fuerza aplicada por el operador humano no depende del movimiento del dispositivo háptico, es decir, que no hay una realimentación háptica. En [1] se desarrolla este tema de manera muy completa, incluyendo manos con dedos robóticos, y tratando el problema del agarre de objetos reales.

En la Sección 7 se introduce la realimentación háptica y un entorno virtual que consta de objetos virtuales que realizan fuerzas que actúan sobre el motor DC del dispositivo háptico. En la Sección 8 se obtiene el modelo matemático de tiempo discreto de un objeto virtual sencillo, que representa un muelle de torsión con una fricción viscosa.

Por último, en la Sección 9 se estudia la realimentación háptica, incorporando todos los elementos de control estudiados hasta aquí, haciendo hincapié en el análisis de la estabilidad háptica y demostrando por qué pueden aparecer en el extremo del dispositivo háptico oscilaciones indeseadas.

Por lo tanto, la idea general de este documento es introducir, paso a paso, el diseño de un sistema háptico, aunque se ha limitado a robots de un único grado de libertad. La extensión a dispositivos hápticos de más grados de libertad no cambia sustancialmente lo que aquí se desarrolla, salvo por el hecho de que las ecuaciones dinámicas son más complejas, y por lo tanto, los análisis requieren técnicas más sofisticadas.

2. Motor DC

En la Figura 2.1 se representa esquemáticamente un motor DC.

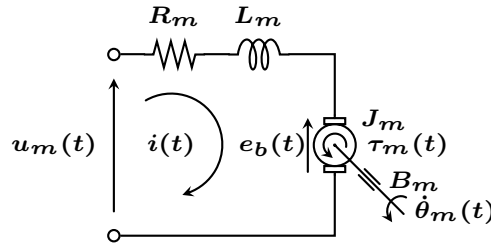


Figura 2.1: MotorDC

La ecuación eléctrica del motor tiene la forma,

$$u_m(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} + e_b(t) \quad (2.1)$$

donde $u_m(t)$ representa la tensión de entrada al motor, $i(t)$ la corriente eléctrica del motor, $e_b(t)$ la fuerza contraelectromotriz, R_m la resistencia terminal y L_m la inductancia del rotor.

La ecuación mecánica del motor es

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + \tau_l(t) + \tau_f(t) \quad (2.2)$$

donde $\tau_m(t)$ representa el par motor, $\ddot{\theta}_m(t)$ la aceleración angular del motor, J_m la inercia del rotor, $\tau_l(t)$ el par de la carga visto desde el eje del motor y $\tau_f(t)$ el par de fricción.

En el Apéndice A se presenta un modelo de fricción, que nos permite escribir la ecuación mecánica en la forma

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + B_m \dot{\theta}_m(t) + \tau_c(t) \quad (2.3)$$

donde $\dot{\theta}_m(t)$ es la velocidad angular del motor, $B_m \dot{\theta}_m(t)$ el par de fricción viscosa con B_m la constante de fricción viscosa (damping viscous constant), y $\tau_c(t)$ el par que incorpora la carga y la fricción, a excepción del par de fricción viscosa.

En lo que sigue solo se tendrá en cuenta la fricción viscosa, por lo que la ecuación mecánica quedará en la forma,

$$\tau_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + B_m \dot{\theta}_m(t) + \tau_l(t) \quad (2.4)$$

Normalmente un motor DC satisface las siguientes relaciones de acoplo electromecánico:

$$e_b(t) = k_b \dot{\theta}_m(t) \quad (2.5a)$$

$$\tau_m(t) = k_m i(t) \quad (2.5b)$$

donde k_b y k_m son constantes del motor, constante de la fuerza contraelectromotriz (back-EMF constant) y constante de par (torque constant), respectivamente. Cuando se expresan en unidades del mismo sistema de unidades $k_b = k_m$.

Se denominan **constante de tiempo eléctrica** t_e y **constante de tiempo mecánica** t_m (cuyas unidades en el sistema internacional es de segundos), a las siguientes relaciones:

$$t_e = \frac{L_m}{R_m} \quad (2.6a)$$

$$t_m = \frac{R_m J_m}{R_m B_m + k_b k_m} \quad (2.6b)$$

Las ecuaciones del motor DC pueden simplificarse teniendo en cuenta que la constante eléctrica del motor suele ser mucho menor que la constante mecánica, es decir, que $t_e \ll t_m$, lo que se traduce en despreciar el factor de la inductancia L_m en la ecuación eléctrica. Entonces, la ecuación eléctrica dada por 2.1 quedaría en la forma:

$$u_m(t) = R_m i(t) + k_b \dot{\theta}_m(t) \quad (2.7)$$

Despejando la corriente eléctrica $i(t)$ de la ecuación mecánica 2.4, teniendo en cuenta la relación 2.5b, y sustituyendo en la ecuación anterior 2.7, se obtiene la **ecuación simplificada del motor DC**,

$$u_m(t) = \frac{R_m J_m}{k_m} \ddot{\theta}_m(t) + \left(\frac{R_m B_m}{k_m} + k_b \right) \dot{\theta}_m(t) + \frac{R_m}{k_m} \tau_l(t) \quad (2.8)$$

La ecuación del motor simplificada dada por 2.8 representa, en ausencia de carga, una ecuación diferencial lineal de primer orden para la variable de velocidad angular y de segundo orden para la variable de posición angular.

Nos va a interesar escribir la ecuación simplificada del motor en la forma de pares en el eje del motor, en vez de en la forma de tensiones eléctricas,

$$\frac{k_m}{R_m} u_m(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) + \left(B_m + \frac{k_b k_m}{R_m} \right) \dot{\theta}_m(t) + \tau_l(t) \quad (2.9)$$

3. Modelo de carga de un motor DC de un grado de libertad

En la Figura 3.1 se representan esquemáticamente la parte mecánica de un motor DC, la Reductora y la Carga del motor.

Consideremos que la carga está unida al eje del motor a través de un mecanismo reductor de factor de reducción $r \in (0, 1)$ y rendimiento $\eta \in (0, 1)$. Entonces la velocidad angular $\dot{\theta}_L(t)$ y el par de la carga $\tau_L(t)$ a la salida del reductor estarán relacionados con $\dot{\theta}_m(t)$ y $\tau_l(t)$ en el eje del motor (o entrada del reductor) según las siguientes expresiones:

$$\theta_L(t) = r \theta_m(t) \quad (3.1a)$$

$$\tau_L(t) = \frac{\eta}{r} \tau_l(t) \quad (3.1b)$$

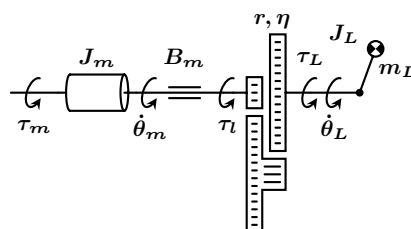


Figura 3.1: Eje, Reductora y Carga del MotorDC

En los Apéndices C y D se demuestra que la energía cinética y potencial de un cuerpo rígido que rota alrededor del eje z del sistema de referencia inercial \mathcal{S}_0 vienen dadas por

$$K = \frac{1}{2} m v_c^T v_c + \frac{1}{2} \tilde{w}^T I_c \tilde{w} \quad (3.2a)$$

$$V = mgr_{cy} \quad (3.2b)$$

donde m es la masa, v_c la velocidad lineal del centro de masas, $\tilde{w} = R_z w$, con w la velocidad angular del objeto y R_z la matriz de rotación entre los sistemas de referencia \mathcal{S}_0 y \mathcal{S}_c , r_{cy} la coordenada y de la posición del centro de masas, g la constante gravitatoria terrestre, e I_c el tensor de inercia constante alrededor del centro de masas,

$$I_c = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Como se trata de un mecanismo de un único grado de libertad, las coordenadas cartesianas del centro de masas referidas al sistema \mathcal{S}_0 son,

$$X_c = l_c \begin{bmatrix} \cos \theta_L(t) \\ \sin \theta_L(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Derivando con respecto al tiempo, se obtiene la velocidad lineal del centro de masas, v_c , y a partir de la derivada de la matriz elemental de rotación alrededor del eje z se obtiene la velocidad angular \tilde{w} . Por lo tanto,

$$v_c = l_c \dot{\theta}_L(t) \begin{bmatrix} -\sin \theta_L(t) \\ \cos \theta_L(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5a)$$

$$\tilde{w} = \dot{\theta}_L(t) \mathbf{k} = \dot{\theta}_L(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.5b)$$

$$r_{cy} = l_c \sin \theta_L(t) \quad (3.5c)$$

$$\tilde{w}^T I_c \tilde{w} = I_{zz} \dot{\theta}_L^2(t) \quad (3.5d)$$

$$v_c^T v_c = l_c^2 \dot{\theta}_L^2(t) \quad (3.5e)$$

siendo l_c la distancia entre el origen del sistema de referencia inercial \mathcal{S}_0 y el centro de masas e I_{zz} el momento de inercia constante alrededor del eje z del sistema de referencia fijo en el centro de masas \mathcal{S}_c .

La ecuación dinámica de la carga puede obtenerse de diversas formas, como se explica en el Apéndice E. Una de ellas es la formulación de Euler-Lagrange, que es la que vamos a seguir aquí.

Se define el Lagrangiano como $L = K - V$, donde K es la energía cinética y V la energía potencial del mecanismo. Entonces, puede demostrarse que la ecuación dinámica de cualquier mecanismo de sólidos rígidos, puede obtenerse mediante la relación de Euler-Lagrange, que para un único grado de libertad tiene la forma siguiente:

$$\tau_L(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_L(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_L(t)} \quad (3.6)$$

donde $\tau_L(t)$ se denomina fuerza o par generalizado.

Entonces, teniendo en cuenta los desarrollos anteriores, se cumple que

$$\tau_L(t) = J_L \ddot{\theta}_L(t) + mgl_c \cos \theta_L(t) \quad (3.7)$$

donde $J_L = I_{zz} + ml_c^2$.

Expresando $\theta_L(t)$ y $\tau_L(t)$ en términos de $\theta_m(t)$ y $\tau_l(t)$ vistos en el eje del motor, la ecuación del movimiento del objeto dada por 3.7 queda en la forma,

$$\tau_l(t) = \frac{r^2 J_L}{\eta} \ddot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta} \tau_g(t) \quad (3.8)$$

donde $\tau_g(t) = mgl_c \cos(r\theta_m(t))$ es el par gravitatorio.

Introduciendo esta ecuación en la ecuación simplificada del motor dada por 2.9,

$$\frac{k_m}{R_m} u_m(t) = J_{eff} \ddot{\theta}_m(t) + B \dot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta} \tau_g(t) \quad (3.9)$$

donde J_{eff} se denomina momento de inercia efectivo,

$$J_{eff} = J_m + \frac{r^2 J_L}{\eta} \quad (3.10a)$$

$$B = B_m + \frac{k_b k_m}{R_m} \quad (3.10b)$$

$$\tau_g(t) = mgl_c \cos(r\theta_m(t)) \quad (3.10c)$$

4. Incorporación de una fuerza externa al modelo del motor con carga

Supongamos que se aplica al extremo, P_e , del robot de un único grado de libertad, una fuerza externa f_e y un momento de fuerzas n_e , entonces el par que aparece en la articulación tiene la forma,

$$\tau_e(t) = J^T(\theta_L(t)) F_e(t) \quad (4.1)$$

donde J representa al Jacobiano del robot, y F_e el 'torsor' de fuerzas externas,

$$J(\theta_L(t)) = \begin{bmatrix} -l \sin(\theta_L(t) + \alpha_c) \\ l \cos(\theta_L(t) + \alpha_c) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2a)$$

$$F_e(t) = \begin{bmatrix} f_{ex}(t) \\ f_{ey}(t) \\ f_{ez}(t) \\ n_{ex}(t) \\ n_{ey}(t) \\ n_{ez}(t) \end{bmatrix} \quad (4.2b)$$

donde l es la distancia entre el origen del sistema de referencia inercial S_0 y el punto donde se aplica la fuerza externa, y α_c es el ángulo constante entre los vectores P_e y r_c .

La demostración de la relación 4.1 deriva del principio de los trabajos virtuales de D'Alembert, cuya idea es considerar el caso de una situación estática del mecanismo, sobre el que se realiza un desplazamiento infinitesimal o virtual por la acción de la fuerza externa, y compatible con las ligaduras existentes en el mecanismo, las cuales, por la hipótesis de rigidez, no realizan trabajo. No se va a hacer aquí esta demostración.

Por lo tanto,

$$\tau_e(t) = l(-f_{ex}(t) \sin(\theta_L(t) + \alpha_c) + f_{ey}(t) \cos(\theta_L(t) + \alpha_c)) + n_{ez}(t) \quad (4.3)$$

La fuerza $f_e(t)$ puede descomponerse en una fuerza tangente y una fuerza normal al movimiento del robot. La fuerza normal no ejerce trabajo, por lo que la fuerza externa solo influirá en su componente tangencial.

Sea $f_{eT}(t)$ el módulo de la fuerza tangencial, entonces la fuerza efectiva será

$$f_{ex}(t) = \pm f_{eT}(t) \sin(\theta_L(t) + \alpha_c) \quad (4.4a)$$

$$f_{ey}(t) = \mp f_{eT}(t) \cos(\theta_L(t) + \alpha_c) \quad (4.4b)$$

por lo que,

$$\tau_e(t) = \mp l f_{eT}(t) + n_{ez}(t) \quad (4.5)$$

Que la fuerza normal no ejerce trabajo puede verse fácilmente. Se debe a que la ligadura existente en la articulación obliga a que el movimiento sea una trayectoria circular en el plano xy del sistema de referencia inercial \mathcal{S}_0 , es decir, que la ligadura consiste en una restricción cinemática holonómica (solo depende de la posición y no de la velocidad), que satisface la relación $x^2(t) + y^2(t) = l^2$. Sea $f_{eN}(t)$ el módulo de la fuerza normal, entonces

$$f_{eNx}(t) = \pm f_{eN}(t) \cos(\theta_L(t) + \alpha_c) \quad (4.6a)$$

$$f_{eNy}(t) = \pm f_{eN}(t) \sin(\theta_L(t) + \alpha_c) \quad (4.6b)$$

por lo que $\tau_{eN}(t) = 0$.

Introduciendo la ecuación 4.5 en la ecuación simplificada del motor con carga dada por 3.9

$$\frac{k_m}{R_m} u_m(t) = J_{eff} \ddot{\theta}_m(t) + B \dot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta} \tau_g(t) - \frac{r}{\eta} (l f'_{eT}(t) - n_{ez}(t)) \quad (4.7)$$

donde $f'_{eT}(t) = \pm f_{eT}(t)$.

En lo que sigue se utilizará la notación $f_{eT}(t)$ en vez de $f'_{eT}(t)$, para indicar el módulo de la fuerza tangencial con signo, entendiéndose que el signo será positivo cuando la fuerza tangencial se aplica en sentido contrario a las agujas del reloj en el plano xy del sistema de referencia inercial \mathcal{S}_0 .

5. Control de par calculado

La técnica de control de par calculado consiste en definir una estructura con dos lazos de realimentación como se muestra en la Figura 5.1. Un lazo interno cuya función es linealizar el sistema, y un lazo externo cuya función es controlar un sistema lineal que satisfaga ciertas especificaciones de diseño. Aunque en esta Sección se estudia un sistema de un único grado de libertad, es sencillo generalizarlo a un sistema de control multivariable aplicable a un robot de n grados de libertad.

La ecuación dinámica del motor con carga obtenida en la Sección 3 puede escribirse como

$$u(t) = J_{eff} \ddot{\theta}_m(t) + B \dot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta} \tau_g(\theta_m(t)) \quad (5.1)$$

donde $u(t) = \frac{k_m}{R_m} u_m(t)$ siendo $u_m(t)$ la tensión eléctrica aplicada al motor DC.

La técnica de control del par calculado consiste en aplicar la ley de control realimentado, no lineal, siguiente,

$$u(t) = J_{eff} v(t) + B \dot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta} \tau_g(\theta_m(t)) \quad (5.2)$$

donde $v(t)$ representa una señal de entrada que aún queda por diseñar.

Sustituyendo la ley de control dada por 5.2 en la ecuación 5.1,

$$v(t) = \ddot{\theta}_m(t) \quad (5.3)$$

donde se ha tenido en cuenta que $J_{eff} \neq 0$.

Lo que esta última relación significa es que con la ley de control 5.2 el sistema se comportará como un doble integrador, por lo que el diseño de $v(t)$ puede hacerse utilizando técnicas bien conocidas de diseño de controladores lineales. No obstante, para que se cumpla este hecho deberá realizarse una cancelación perfecta de los términos inerciales, de fricción viscosa y gravitacionales. Por desgracia, en la práctica, los errores e incertidumbre en el modelado del sistema suele ser lo normal, por lo que realmente la relación que resulta de la cancelación tiene la forma general,

$$v(t) = \ddot{\theta}_m(t) - \sigma(t) \quad (5.4)$$

donde $\sigma(t)$ es una función no lineal variable en el tiempo y, en general, dependiente de $\theta_m(t)$ y $\dot{\theta}_m(t)$.

Hay diversas técnicas de control que tienen en cuenta $\sigma(t) \neq 0$, como son el control robusto o el control adaptativo. Una técnica sencilla que permite seguir aplicando técnicas de control lineal es considerando que $\sigma(t)$ es una perturbación, y diseñando controladores lineales que resuelvan el problema de supresión de perturbaciones. No abordaremos, en este escrito, ninguna de ellas, aunque debe entenderse que cualquier función que no se haya tenido en cuenta en el modelo, como puede ser la fricción estática, pueden ser tratadas como una perturbación.

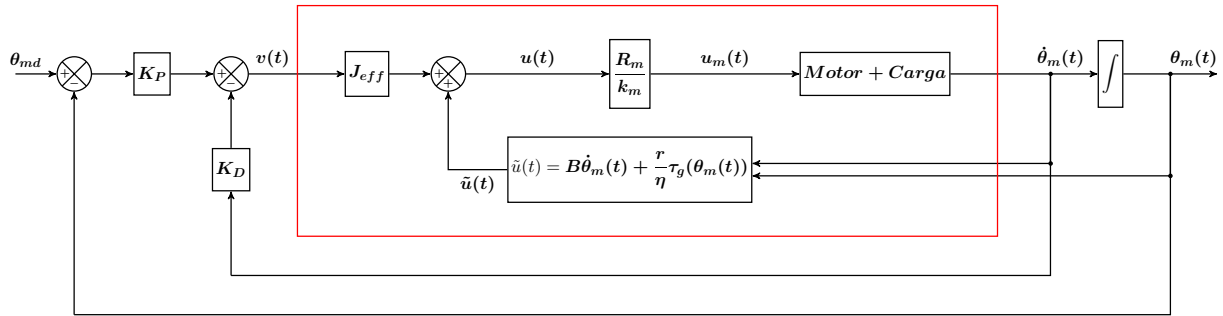


Figura 5.1: Esquema de control de posición de par calculado

El diseño de la señal de control $v(t)$ depende de la aplicación que vaya a realizarse.

Si se desea realizar un control de posición donde la posición deseada, θ_{md} , sea conocida, y suponiendo que la cancelación es perfecta, es decir, que $\sigma(t) = 0$, puede diseñarse un controlador de tipo P-D como el que se muestra en la Figura 5.1. En este caso $v(t)$ tiene la forma siguiente,

$$v(t) = K_P(\theta_{md} - \theta_m(t)) - K_D\dot{\theta}_m(t) \quad (5.5)$$

donde K_P y K_D son constantes de diseño.

En la Figura 5.1 se ha enmarcado en rojo el sistema linealizado a través de un lazo de realimentación interno, que satisface, idealmente, la relación 5.3, $v(t) = \dot{\theta}_m(t)$.

En la Sección 6 se estudia el diseño de un controlador, inspirado en la técnica del par calculado, con el objetivo de resolver un problema típico de los sistemas hápticos, que básicamente consiste en compensar exclusivamente la componente gravitatoria cuando deja de aplicarse una fuerza externa.

6. Diseño de un controlador para compensar el par gravitatorio

El objetivo de esta Sección es diseñar un controlador que permita mover la carga cuando se aplica una fuerza externa al extremo de la carga, y que el motor se detenga cuando deja de aplicarse tal fuerza. Es decir, el objetivo es diseñar una ley de control $u(t)$ que satisfaga esas dos condiciones sin necesidad de incorporar sensores de fuerza, ni de conocer los instantes de tiempo en que se aplica o no se aplica la fuerza externa. Para ello se va a diseñar un controlador inspirado en la técnica de control de par calculado estudiada en la Sección 5, pero en vez de utilizarla para el diseño de un controlador de posición se hará para el diseño de un controlador de velocidad realizando algunas modificaciones, como veremos a continuación.

En lo que sigue vamos a suponer que se aplica al extremo de la carga una fuerza externa variable en el tiempo, $F_e(t)$, durante un intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$, estando inicialmente el eje del motor en la posición angular $\theta_m(t_0^-)$ y velocidad angular $\dot{\theta}_m(t_0^-)$. Y supongamos que deja de aplicarse dicha fuerza para $t > t_f^-$.

Durante el intervalo de aplicación de la fuerza externa $F_e(t)$ la carga sufre un movimiento pasando a la posición angular $\theta_m(t_f^-)$ y velocidad angular $\dot{\theta}_m(t_f^-)$. Nuestro objetivo es diseñar un controlador que satisfaga la condición de que el robot se encuentre parado en cualquier posición cuando deje de aplicarse la fuerza externa. Por lo tanto, la condición que debe cumplirse es que la velocidad sea nula cuando deje de aplicarse tal fuerza externa,

$$\dot{\theta}_{md} = 0, \quad t > t_f^- \quad (6.1)$$

donde $\dot{\theta}_{md}$ representa la velocidad angular deseada.

Consideremos la ecuación dinámica del motor con carga y una fuerza aplicada a su extremo estudiada en la Sección 4 y dada por la ecuación dinámica 4.7 aplicada en el intervalo $t \in [t_0, t_f]$, y la ecuación dinámica del motor con carga cuando no se aplica una fuerza externa, es decir, cuando $f_{eT} = n_{ez} = 0$,

$$u(t) = \begin{cases} J_{eff}\ddot{\theta}_m(t) + B\dot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta}\tau_g(\theta_m(t)) - \frac{r}{\eta}(lf_{eT}(t) - n_{ez}(t)) & t \in [t_0, t_f] \quad (6.2a) \\ J_{eff}\ddot{\theta}_m(t) + B\dot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta}\tau_g(\theta_m(t)) & t > t_f \quad (6.2b) \end{cases}$$

donde $u(t) = \frac{k_m}{R_m}u_m(t)$ siendo $u_m(t)$ la entrada de tensión eléctrica al motor DC, y $\tau_g(\theta_m(t)) = mgl_c \cos(r\theta_m(t))$ representa el par gravitatorio.

La ley de control de par calculado estudiada en la Sección 5 viene dada por,

$$u(t) = J_{eff}v(t) + B\dot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta}\tau_g(\theta_m(t)) \quad (6.3)$$

donde $v(t)$ representa una señal de entrada que aún queda por diseñar.

Como se ha visto en la Sección 5, sustituyendo la ley de control dada por 6.3 en la ecuación 6.2b, el sistema se comportará como un doble integrador, es decir, se producirá una linealización del sistema que satisface la ecuación dinámica $v(t) = \ddot{\theta}_m(t)$.

Con el fin de que la fricción viscosa ejerza un papel de freno del movimiento del motor, puede modificarse la ley de control $u(t)$,

$$u(t) = J_{eff}v(t) + \frac{r}{\eta}\tau_g(\theta_m(t)) \quad (6.4)$$

Entonces, suponiendo una cancelación perfecta del par gravitatorio $\tau_g(\theta_m(t))$, el sistema se habrá linealizado, para $t > t_f$, siguiendo la ecuación dinámica,

$$v(t) = \ddot{\theta}_m(t) + \frac{B}{J_{eff}}\dot{\theta}_m(t) \quad (6.5)$$

Con el fin de que el robot se detenga con rapidez, puede diseñarse un controlador lineal de velocidad, es decir, un controlador realimentado de tipo derivativo situado en el lazo paralelo,

$$v(t) = -\frac{K_D}{J_{eff}}\dot{\theta}_m(t) \quad (6.6)$$

donde K_D es una constante de diseño.

En resumen, la ley de control $u(t)$ quedaría en la forma,

$$u(t) = -K_D\dot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta}\tau_g(\theta_m(t)) \quad (6.7)$$

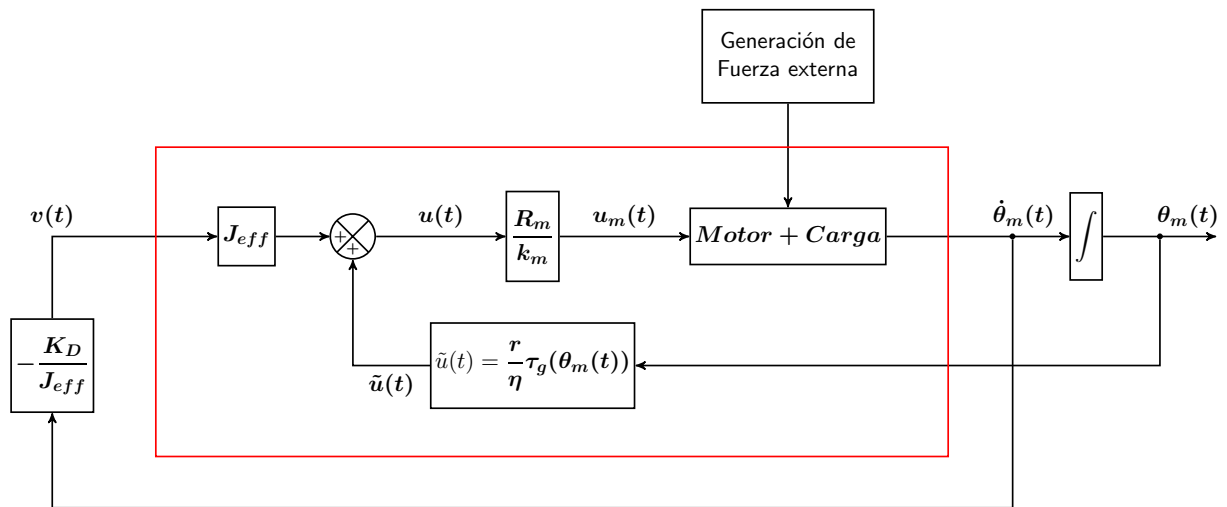


Figura 6.1: Esquema de control de compensación del par gravitacional basado en la técnica de par calculado

En la Figura 6.1 se muestra el esquema de bloques del sistema de control. Para mostrar la similitud con la técnica del par calculado estudiada en la Sección 5, se ha enmarcado en rojo la parte linealizada que satisface la relación 6.5.

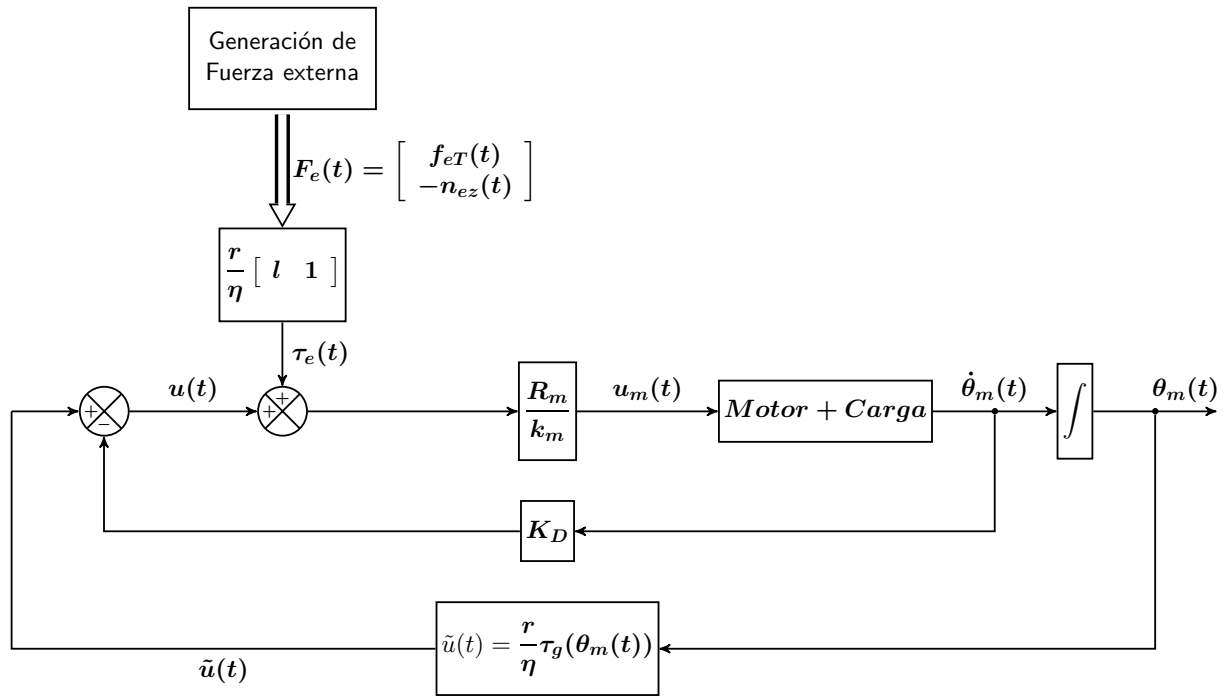


Figura 6.2: Esquema de control de compensación del par gravitacional

En la Figura 6.2 se muestra el esquema de bloques del sistema de control haciendo explícito el par $\tau_e(t)$ que aparece en el eje del motor debido a la fuerza externa $F_e(t)$ aplicada al extremo de la carga, teniendo en cuenta solamente las componentes relevantes, la fuerza tangencial, $f_{eT}(t)$, y el momento de fuerzas $n_{ez}(t)$. La doble flecha indica una operación matricial, ya que

$$\tau_e(t) = \frac{r}{\eta} [l \ 1] \begin{bmatrix} f_{eT} \\ -n_{ez} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

A continuación, se va a demostrar que este controlador resuelve el problema que nos hemos planteado en el caso en que la fuerza externa aplicada sea constante.

Con la ley de control dada por 6.7 el sistema se comportará de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial,

$$\ddot{\theta}_m(t) + \left(\frac{K_D + B}{J_{eff}} \right) \dot{\theta}_m(t) = \begin{cases} \frac{r\tau_e}{\eta J_{eff}} & t \in [t_0, t_f] \\ 0 & t > t_f^- \end{cases} \quad (6.9a)$$

$$t > t_f^- \quad (6.9b)$$

donde $\tau_e = lf_{eT} - n_{ez}$.

La solución en velocidad de la ecuación diferencial 6.9 es,

$$\dot{\theta}_m(t) = \begin{cases} \dot{\theta}_m(t_0^-) e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t - t_0)} + \frac{r\tau_e}{\eta(K_D + B)} \left(1 - e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t - t_0)} \right) & t \in [t_0, t_f] \\ \dot{\theta}_m(t_f^-) e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t - t_f)} & t > t_f^- \end{cases} \quad (6.10a)$$

$$t > t_f^- \quad (6.10b)$$

En $t = t_f$,

$$\dot{\theta}_m(t_f^-) = \dot{\theta}_m(t_0^-) e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t_f - t_0)} + \frac{r\tau_e}{\eta(K_D + B)} \left(1 - e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t_f - t_0)} \right) \quad (6.11)$$

Sustituyendo 6.11 en 6.10b, se obtendría el comportamiento del motor en ausencia de fuerza, para $t > t_f^-$,

$$\dot{\theta}_m(t) = \dot{\theta}_m(t_0^-) e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t - t_0)} + \frac{r\tau_e}{\eta(K_D + B)} \left(e^{\frac{K_D + B}{J_{eff}}t_f} - e^{\frac{K_D + B}{J_{eff}}t_0} \right) e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}t} \quad (6.12)$$

Si se supone que la fuerza se ha comenzado a aplicar cuando el motor está parado, entonces, $\dot{\theta}_m(t_0^-) = 0$, por lo que, para $t > t_f^-$

$$\dot{\theta}_m(t) = \frac{r\tau_e}{\eta(K_D + B)} \left(e^{\frac{K_D + B}{J_{eff}}t_f} - e^{\frac{K_D + B}{J_{eff}}t_0} \right) e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}t} \quad (6.13)$$

Haciendo K_D suficientemente elevado, el motor se detendrá rápidamente cuando se dejase de aplicar una fuerza externa constante.

Puede observarse que la constante $\frac{B}{J_{eff}}$ representa la inversa de la constante de tiempo mecánica del motor cuando se incorpora la carga. Si $K_D = 0$, al tener la constante de tiempo mecánica del motor un valor normalmente muy pequeño, el motor se detendría lentamente cuando se dejase de aplicar la fuerza externa. Hay que tener en cuenta también, que cuando la velocidad del motor es muy baja aparecen pares de fricción que frenan el motor, lo cual es una ventaja en esta aplicación.

En resumen, con la ley de control 6.7 puede lograrse el objetivo en el régimen permanente con un transitorio de duración muy breve, al menos cuando la fuerza externa aplicada sea constante.

Si la fuerza externa aplicada no es constante sino que depende explícitamente del tiempo, la ecuación del movimiento dada por 6.2a con la ley de control 6.7, y si hay una cancelación perfecta del par gravitacional, quedaría en la forma,

$$J_{eff}\ddot{\theta}_m(t) + (K_D + B)\dot{\theta}_m(t) = \frac{r}{\eta}(l f_{eT}(t) - n_{ez}(t)) \quad (6.14)$$

cuya solución general en velocidad en el intervalo $[t_0, t_f]$ es,

$$\dot{\theta}_m(t) = \dot{\theta}_m(t_0^-) e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t - t_0)} + \frac{r}{\eta} \int_{t_0}^t e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t - \nu)} \tau_e(\nu) d\nu \quad (6.15)$$

donde $\tau_e(\nu) = l f_{eT}(\nu) - n_{ez}(\nu)$.

En $t = t_f$, $\dot{\theta}_m(t_f)$ será la siguiente constante dependiente del parámetro de diseño K_D ,

$$\dot{\theta}_m(t_f^-) = \dot{\theta}_m(t_0^-) e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t_f - t_0)} + \frac{r}{\eta} \int_{t_0}^{t_f} e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t_f - \nu)} \tau_e(\nu) d\nu \quad (6.16)$$

Por lo tanto, con cualquier fuerza externa dependiente explícitamente del tiempo, el comportamiento del robot en ausencia de fuerza externa seguirá siendo la adecuada, ya que seguirá la evolución dada por la relación 6.10b, para $t > t_f^-$,

$$\dot{\theta}_m(t) = \dot{\theta}_m(t_f^-) e^{-\frac{K_D + B}{J_{eff}}(t - t_f)} \quad (6.17)$$

donde K_D es un parámetro de diseño y $\dot{\theta}_m(t_f^-)$ es una constante dependiente de K_D que viene dada por 6.16.

Si la fuerza externa depende de la posición angular $\theta_m(t)$ o de la velocidad angular $\dot{\theta}_m(t)$, el comportamiento del sistema será distinto al estudiado en esta Sección, ya que se produce una realimentación entre el generador de la fuerza y el motor con carga. Entonces, la solución dada por 6.15 es incorrecta. Este hecho es el que ocurre cuando se produce una realimentación háptica. En la Sección 7 se introduce esta problemática.

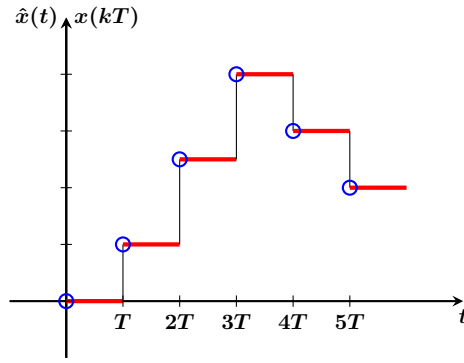


Figura 7.2: Dispositivo de retención de orden cero (ZOH): $x(kT)$ es la entrada (azul) y $\hat{x}(t)$ la salida (rojo)

En la Figura 7.1 se ha incluido una realimentación visual, aunque en general, puede ser acústica o de cualquier otra modalidad perceptiva o simplemente no existir.

Diremos que se producen sensaciones hápticas cuando exista una relación entre la fuerza ejercida sobre un objeto y el movimiento de dicho objeto, es decir, entre la fuerza y la velocidad. El mero contacto con un objeto no se considera una sensación háptica, aunque en algunos casos deba considerarse un límite ideal de sensación háptica. Un ejemplo es el caso de empujar o presionar una pared completamente rígida, ya que en este caso se produce en la pared una fuerza de reacción estática, es decir, sin que haya movimiento. En la realidad las paredes pueden ser muy rígidas, pero al empujarlas con la mano sí se produce un movimiento de presión debido a la elasticidad de la mano. Si el robot que empuja la pared es rígido, puede simularse una pared elástica con características similares a las de una mano que no fuese rígida. En este caso se produciría un movimiento relacionado con la fuerza aplicada a la pared virtual y por lo tanto sí debería considerarse que la realimentación de la fuerza es una realimentación háptica ya que se produce un movimiento.

Probablemente el ejemplo más simple es el caso en que el operador humano del dispositivo háptico, empuje un objeto virtual que se encuentre en una superficie rugosa de un entorno virtual. Si el objeto consiste en una masa rígida, cuando se le aplica una fuerza f_V , se produce un movimiento que se rige por la ecuación,

$$f_V(t) = m_V \ddot{X}(t) + B_V \dot{X}(t) \quad (7.1)$$

donde $X(t)$ representa el desplazamiento, B_V la constante de fricción viscosa del suelo y m_V la masa del objeto.

La realimentación háptica consiste en que el operador humano, al desplazar el objeto virtual, percibe la fuerza de reacción del objeto en movimiento, $-f_V(t)$. Aquí estamos suponiendo que los objetos virtuales siguen las leyes del movimiento de los objetos reales, pero esto no tiene por qué ser así. Lo importante para la realimentación háptica es que exista una fuerza de reacción del objeto virtual relacionada con el movimiento del extremo del dispositivo háptico. No obstante, en este escrito siempre supondremos que los objetos virtuales siguen las mismas leyes que sus análogos reales.

Para estudiar el movimiento del objeto virtual es necesario que se establezca una relación entre las coordenadas cartesianas del extremo del dispositivo háptico y las coordenadas del objeto virtual. Por lo tanto, deberá existir una relación entre el sistema de referencia inercial del dispositivo háptico \mathcal{S}_M y el sistema de referencia inercial del entorno virtual \mathcal{S}_V . La solución más sencilla a este problema es considerar que una determinada posición Q_0 del extremo del dispositivo háptico, expresado en coordenadas del sistema \mathcal{S}_M , se corresponda con el origen de coordenadas del sistema de referencia virtual \mathcal{S}_V , y que la relación entre \mathcal{S}_M y \mathcal{S}_V consista en un movimiento rígido constante, es decir, que pueda expresarse como una rotación y una traslación constantes.

Llamemos $d_0^{m_0}$ al punto Q_0 expresado en coordenadas relativas al sistema \mathcal{S}_M , es decir, $\overrightarrow{OQ_0} = d_0^{m_0}$, y $R_0^{m_0}$ a la matriz de rotación constante del sistema \mathcal{S}_V respecto al sistema \mathcal{S}_M .

Por lo tanto, el punto Q del extremo del dispositivo háptico, cuyas coordenadas en el sistema \mathcal{S}_M es d_0^m se transforma en las coordenadas en el sistema \mathcal{S}_V según la relación, $d_0^v = R_0^{m_0} d_0^m + d_0^{m_0}$

donde $d_{n_0}^m = \overrightarrow{Q_0Q}$ expresado en coordenadas del sistema \mathcal{S}_V . De aquí que, en el sistema \mathcal{S}_V ,

$$d_{n_0}^m = (R_0^{n_0})^T (d_0^m - d_0^{n_0}) \quad (7.2)$$

El punto Q del extremo del dispositivo háptico puede entrar en contacto virtual con un objeto virtual en un determinado punto, ejerciendo sobre él una fuerza que lo desplace según la relación dada por 7.1. El desplazamiento $X(t)$ deberá expresarse en coordenadas del sistema \mathcal{S}_V . Si el objeto virtual se encuentra inicialmente en la posición X_0 , entonces $X(t) = X_{n_0}(t) - X_0$, donde $X_{n_0}(t) = d_{n_0}^m(t)$ y $X_0 = d_{n_0}^m(t_0)$, siendo t_0 el instante de tiempo en el que el extremo del dispositivo háptico entra en contacto por primera vez con el objeto virtual.

De esta manera es evidente que deberá resolverse el **problema de la detección de colisión** previamente al **problema del desplazamiento**. En cualquier caso el **problema del contacto** deberá resolverse durante todo el intervalo de duración del empuje del objeto virtual. Si en algún momento el extremo del dispositivo háptico deja de estar en contacto con el objeto, la fuerza aplicada será nula.

La relación entre el extremo del dispositivo háptico y el objeto virtual puede ser muy variada. Por ejemplo, un desplazamiento traslacional del punto Q del dispositivo háptico puede hacerse corresponder con una rotación del objeto virtual, ya que el entorno virtual es una simulación. Por ejemplo, un desplazamiento traslacional del punto Q puede hacer rodar un disco en el entorno virtual, interpretándose la fuerza aplicada por el dispositivo háptico como un par aplicado al eje del disco, como si el dispositivo háptico estuviese presionando el acelerador de un vehículo. Lo que esto significa es que, aunque admitamos que los objetos virtuales tienen su análogo real, sus movimientos no tienen por qué ser idénticos a los del dispositivo háptico. La realimentación háptica, sin embargo, debe ser tal que el operador humano del dispositivo háptico perciba el mundo virtual sobre el que actúa con la máxima fidelidad posible. A esta exigencia se le denomina **problema de la transparencia háptica**. No obstante, es difícil eliminar la distorsión háptica que hay entre lo que se percibe y lo que se debería percibir debido a las no linealidades de los actuadores y a la resolución de los sensores.

La relación cinemática dada por 7.2 solo es válida en las condiciones definidas anteriormente. Puede resultar útil cuando deba resolverse el problema cinemático directo del dispositivo háptico para obtener las coordenadas en el entorno virtual. Pero, en general, la relación entre \mathcal{S}_M y \mathcal{S}_V puede ser cualquier otra.

En cualquier caso, siempre se producirán errores entre la posición y la velocidad exactas del extremo del dispositivo háptico y las coordenadas en el espacio virtual, debido a los errores numéricos que resultan de resolver el problema cinemático directo, ya que los sensores se encuentran en las articulaciones del dispositivo háptico, y también debido a la discretización necesaria entre el movimiento continuo del dispositivo háptico y el movimiento discreto en el entorno virtual, ya que este último es digital. De hecho, el ejemplo de empujar una masa con fricción viscosa, cuya ecuación dinámica viene dada por 7.1 es continua, mientras que la que realmente se simula en el entorno virtual será discreta. Estos hechos plantean un problema relacionado con la realimentación háptica, denominado **problema de la estabilidad háptica**. La inestabilidad háptica es debida, normalmente, a un muestreo excesivamente lento, y suele percibirse como oscilaciones en el extremo del dispositivo háptico durante el contacto con un objeto virtual. Hay que tener en cuenta que la percepción háptica requiere una frecuencia de muestreo muy elevada para que se perciba una continuidad en los movimientos. **Si en visión hacen falta unas treinta imágenes/s (30Hz), en lo háptico hacen falta señales del orden de 1KHz o superiores.**

8. Modelo virtual de muelle de torsión y fricción viscosa

En esta Sección supondremos que en el entorno virtual, \mathcal{V} , se programan objetos virtuales que establecen una relación entre el par virtual $\tau_V(kT)$ y el desplazamiento angular virtual $\theta_V(kT)$ a través de una ecuación en diferencias obtenida como una discretización de un real análogo al virtual. Al final de la Sección se verá una forma posible de relacionar el desplazamiento angular virtual $\theta_V(kT)$ con el desplazamiento angular real muestreado del dispositivo háptico, $\theta_m(kT)$.

Consideremos que el objeto virtual consiste en un muelle de torsión ideal junto con un par de fricción viscosa. Entonces, el objeto real análogo satisfará la ecuación diferencial siguiente,

$$\tau_V(t) = k_V \theta_V(t) + B_V \dot{\theta}_V(t) \quad (8.1)$$

con la condición inicial $\theta_V(t_0^-)$ y t_0 el instante de tiempo inicial, y donde k_V es la constante de torsión o de elasticidad del muelle, y B_V es la constante de fricción viscosa. La función $\tau_V(t)$ representa el par que debe aplicarse al objeto real para que se encuentre, en el instante de tiempo t , en la posición angular $\theta_V(t)$ y con velocidad angular $\dot{\theta}_V(t)$.

Puesto que el muelle virtual forma parte de un sistema háptico, supondremos, en lo que sigue, que el instante de tiempo inicial, t_0 , se corresponde con el instante de tiempo físico en que se produce la colisión con el objeto virtual. También supondremos que $\tau_V(t) = 0$ para $t \leq t_0^-$. Es decir, $\dot{\theta}_V(t_0^-) = 0$ y $\theta_V(t_0^-) = 0$. Sin embargo, debe permitirse que el par aplicado en el instante de la colisión no sea nulo, es decir, que el valor inicial $\tau_V(t_0^+) \neq 0$.

El término $k_V\theta_V(t)$ está basado en la ley de Hooke para elementos elásticos rotacionales, y deriva de la consideración de que la energía potencial almacenada en el muelle viene dada por $V(t) = \frac{1}{2}k_V\theta_V^2(t)$.

El modelo matemático del objeto virtual puede obtenerse discretizando la ecuación diferencial dada por 8.1. Cualquier discretización siempre será una aproximación de la versión continua, pero se va a obtener, a continuación, una discretización exacta, bajo el supuesto de que a la salida del entorno virtual exista un dispositivo de retención de orden cero (ZOH), es decir, que $\tau_V(t)$ tome valores constantes en cada intervalo de tiempo $[kT, (k+1)T)$.

La solución de la ecuación diferencial dada por 8.1 viene dada por,

$$\theta_V(t) = \theta_V(t_0^-)e^{-\frac{k_V}{B_V}(t-t_0)} + \frac{1}{B_V}e^{-\frac{k_V}{B_V}t} \int_{t_0}^t e^{\frac{k_V}{B_V}\nu} \tau_V(\nu) d\nu \quad (8.2)$$

La solución dada por 8.2 se cumple para todo t , por lo que también se cumplirá para $t = kT$ y $t = (k+1)T$,

$$\theta_V(k) = \theta_V(t_0^-)e^{-\frac{k_V}{B_V}(kT-t_0)} + \frac{1}{B_V}e^{-\frac{k_V}{B_V}kT} \int_{t_0}^{kT} e^{\frac{k_V}{B_V}\nu} \tau_V(\nu) d\nu \quad (8.3a)$$

$$\theta_V(k+1) = \theta_V(t_0^-)e^{-\frac{k_V}{B_V}((k+1)T-t_0)} + \frac{1}{B_V}e^{-\frac{k_V}{B_V}(k+1)T} \int_{t_0}^{(k+1)T} e^{\frac{k_V}{B_V}\nu} \tau_V(\nu) d\nu \quad (8.3b)$$

donde se ha hecho, por comodidad de notación, $\theta_V(kT) = \theta_V(k)$ y $\theta_V((k+1)T) = \theta_V(k+1)$.

El índice temporal k no toma valores $k = 0, 1, 2, \dots$ ya que nos interesa tener en cuenta el instante de tiempo de la colisión en relación al tiempo físico t , es decir, imponer que el instante de tiempo inicial $t_0 \neq 0$. Para facilitar el estudio supondremos que $t_0 = k_0T$, es decir, que la colisión se produce en un instante de tiempo que es múltiplo entero del periodo de muestreo T . Por lo tanto,

$$k \in \{k_0, k_0 + 1, k_0 + 1, \dots\} \quad (8.4)$$

Multiplicando la igualdad 8.3a por $e^{-\frac{k_V T}{B_V}}$ y restando la relación 8.3b, teniendo en cuenta que $\int_{t_0}^{(k+1)T} = \int_{t_0}^{kT} + \int_{kT}^{(k+1)T}$, se obtiene la siguiente ecuación en diferencias,

$$\theta_V(k+1) = e^{-\frac{k_V T}{B_V}} \theta_V(k) + \frac{1}{B_V} e^{-\frac{k_V}{B_V}(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\frac{k_V}{B_V}\nu} \tau_V(\nu) d\nu \quad (8.5)$$

Esta ecuación en diferencias es una discretización exacta de la solución continua. Si ahora suponemos que $\tau_V(t)$ es constante en el intervalo de tiempo $[kT, (k+1)T)$ y de valor $\tau_V(kT)$, la ecuación en diferencias dada por 8.5 puede escribirse como

$$\theta_V(k+1) = e^{-\frac{k_V T}{B_V}} \theta_V(k) + \frac{1}{B_V} e^{-\frac{k_V}{B_V}(k+1)T} \tau_V(k) \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\frac{k_V}{B_V}\nu} d\nu \quad (8.6)$$

donde se ha hecho, por comodidad de notación, $\tau_V(kT) = \tau_V(k)$.

Resolviendo la integral, se obtiene,

$$\theta_V(k+1) = e^{-\frac{k_V T}{B_V}} \theta_V(k) + \frac{1}{k_V} e^{-\frac{k_V}{B_V}(k+1)T} \tau_V(k) \begin{pmatrix} \frac{k_V}{B_V}(k+1)T & \\ & -e^{-\frac{k_V}{B_V}kT} \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

Simplificando,

$$\theta_V(k+1) = e^{-\frac{k_V T}{B_V}} \theta_V(k) + \frac{1}{k_V} \left(1 - e^{-\frac{k_V}{B_V}T} \right) \tau_V(k) \quad (8.8)$$

De aquí que la discretización del modelo de muelle de torsión con fricción puede escribirse en la forma,

$$a_1(T)\theta_V(k+1) + a_2(T)\theta_V(k) = \tau_V(k) \quad (8.9)$$

donde las constantes dependientes del periodo de muestreo, $a_1(T)$ y $a_2(T)$ vienen dadas por,

$$a_1(T) = \frac{k_V}{1 - e^{-\frac{k_V}{B_V}T}} \quad (8.10a)$$

$$a_2(T) = -\frac{k_V e^{-\frac{k_V}{B_V}T}}{1 - e^{-\frac{k_V}{B_V}T}} \quad (8.10b)$$

La ecuación en diferencias dada por 8.9 representa un sistema físico real, y por lo tanto es un sistema causal, donde la entrada es $\tau_V(k)$ y la salida es $\theta_V(k)$. Sin embargo, los objetos virtuales deben construirse de tal manera que la entrada sea $\theta_V(k)$ y la salida sea $\tau_V(k)$, o más concretamente la fuerza de reacción del objeto virtual, es decir, $-\tau_V(k)$. Esto significa que no pueden ser completamente análogos a los sistemas reales. De hecho para poder obtener $\tau_V(k)$ es necesario conocer $\theta_V(k+1)$, es decir, un valor del futuro, y por lo tanto, desconocido en el instante de tiempo $t = kT$.

Una solución a este problema de no causalidad del objeto virtual es provocar un retardo de un periodo de muestreo en la señal $\tau_V(k)$. Esto podría ser aceptable si T es suficientemente bajo. Haciéndolo así, el modelo de muelle de torsión con fricción virtual sería el siguiente, con $k = k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$,

$$\tau_V(k) = a_1(T)\theta_V(k) + a_2(T)\theta_V(k-1) \quad (8.11)$$

con la condición inicial $\theta_V(k_0) = 0$, y donde las constantes dependientes del periodo de muestreo, $a_1(T)$ y $a_2(T)$ vienen dadas por,

$$a_1(T) = \frac{k_V e^{\frac{k_V}{B_V}T}}{e^{\frac{k_V}{B_V}T} - 1} \quad (8.12a)$$

$$a_2(T) = -\frac{k_V}{e^{\frac{k_V}{B_V}T} - 1} \quad (8.12b)$$

Hay que tener en cuenta que $\theta_V(k)$ está relacionado de alguna forma con el desplazamiento real del extremo del dispositivo háptico. Si suponemos que el dispositivo háptico es un robot de un único grado de libertad, esto requiere medir $\theta_m(t)$, es decir, la posición angular del eje del motor. Si se quiere que $\theta_V(t) = \theta_m(t)$ el problema de la no causalidad también estaría presente, aunque podría

evitarse con un sensor de velocidad angular, es decir, midiendo también $\dot{\theta}_m(t)$. Si así se hiciese, el modelo virtual sería la aplicación directa de la ecuación 8.1,

$$\tau_V(k) = k_V \theta_V(k) + B_V \dot{\theta}_V(k) \quad (8.13)$$

donde $\theta_V(k) = \theta_m(k)$ y $\dot{\theta}_V(k) = \dot{\theta}_m(k)$.

Normalmente no se dispone de sensores de velocidad (también llamados tacómetros), y lo que suele hacerse es utilizar una aproximación discreta en atraso de la derivada. La más sencilla es la aproximación de Euler en atraso de la derivada, que tiene la forma,

$$\dot{\theta}_m(t) \approx \frac{\theta_m(k) - \theta_m(k-1)}{T} \quad (8.14)$$

Sustituyendo esta aproximación en la ecuación 8.1, suponiendo que $\theta_V(t) = \theta_m(t)$, y agrupando términos

$$\tau_V(k) = b_1(T) \theta_V(k) + b_2(T) \theta_V(k-1) \quad (8.15)$$

con la condición inicial $\theta_V(k_0) = 0$, y donde

$$b_1(T) = k_V + \frac{B_V}{T} \quad (8.16a)$$

$$b_2(T) = -\frac{B_V}{T} \quad (8.16b)$$

Podemos observar que, para este sistema de muelle de torsión con fricción, los modelos virtuales dados por 8.11 y 8.15 se diferencian exclusivamente en las constantes. Pero podemos comprobar que las constantes $b_i(T)$ son una aproximación de las constantes exactas $a_i(T)$ para periodos de muestreo muy bajos. Puede verse que esto es así teniendo en cuenta la definición de exponencial, sustituyendo en $a_i(T)$ la aproximación lineal de primer grado,

$$e^{\frac{k_V}{B_V} T} = 1 + \frac{k_V}{B_V} T + \frac{1}{2} \left(\frac{k_V}{B_V} T \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{k_V}{B_V} T \right)^3 + \dots \approx 1 + \frac{k_V}{B_V} T \quad (8.17)$$

Por último, conviene señalar que no tienen por qué cumplirse las relaciones $\theta_V(t) = \theta_m(t)$ y $\dot{\theta}_V(t) = \dot{\theta}_m(t)$. Estas relaciones dependen del problema que quiera resolverse, y por lo tanto es una cuestión de diseño del entorno virtual. En el caso de un dispositivo háptico de un único grado de libertad, con un motor y una reductora en la articulación, parece conveniente suponer que $\theta_V(t)$ coincida con la posición angular a la salida de la reductora, además de que la posición estable del muelle no sea cero, sino un valor constante θ_{L0} . Por lo tanto las relaciones entre $\theta_V(t)$ y $\theta_m(t)$, y entre $\dot{\theta}_V(t)$ y $\dot{\theta}_m(t)$ serían

$$\theta_V(t) = r \theta_m(t) - \theta_{L0} \quad (8.18a)$$

$$\dot{\theta}_V(t) = r \dot{\theta}_m(t) \quad (8.18b)$$

donde $r \in [0, 1]$ es el factor de reducción y $\theta_{L0} = r \theta_m(t_0)$.

Incluyendo la relación entre el objeto virtual y el mundo real, dada por 8.18, en la ecuación del objeto virtual 8.11, se obtendrá la ecuación en diferencias que define el objeto virtual programado en el entorno virtual,

$$\tau_V(k) = r a(T) \theta_m(k) + r (k_V - a(T)) \theta_m(k-1) - r a(T) \theta_{m0} \quad (8.19)$$

donde se ha hecho $\theta_{m0} = \theta_m(k_0)$, $a(T) = a_1(T)$, y se ha tenido en cuenta que $a_1(T) + a_2(T) = k_V$.

Por otro lado, las soluciones discretas exactas de un determinado modelo real no siempre resultan ser discretizaciones aproximadas obtenidas con la aproximación en atraso de Euler de la derivada. Pero, en cualquier caso, lo importante no son las matemáticas que se han desarrollado aquí, sino que se resuelva el **problema de la transparencia**, en el sentido de que la percepción háptica del operador humano coincida con el modelo virtual implementado. En esta Sección lo que se ha supuesto es que la percepción háptica humana satisface las leyes de la mecánica, lo cual no está garantizado sin una investigación previa. De hecho se conocen numerosas anomalías en este sentido, como son, por ejemplo, las llamadas **ilusiones hápticas**, de las que no vamos a hablar en este documento.

9. Sistema háptico con un dispositivo háptico de un grado de libertad y un muelle de torsión con fricción viscosa virtual

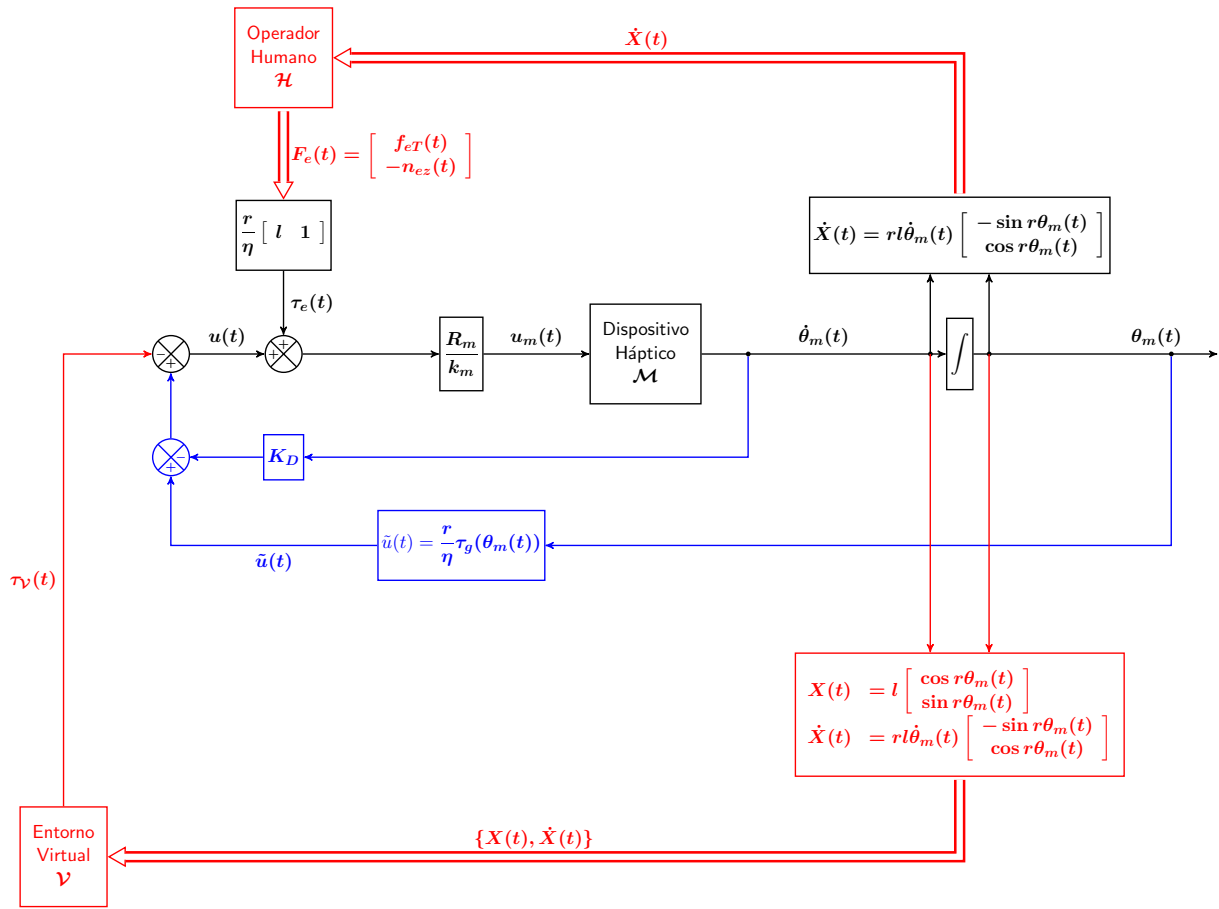


Figura 9.1: Sistema háptico con compensación del par gravitacional de un grado de libertad

En la Sección 6 se diseñó un controlador que permitía compensar el par gravitatorio cuando se dejaba de aplicar una fuerza externa al extremo de un robot de un grado de libertad, y se llegó a la conclusión de que podía lograrse tal compensación cuando la fuerza externa aplicada solo depende del tiempo. Sin embargo, cuando existe una realimentación háptica, la fuerza externa aplicada por el operador humano depende de la velocidad lineal del extremo del dispositivo háptico, como se refleja en la Figura 7.1.

En la Figura 9.1 se muestra el esquema de bloques de un sistema háptico incluyendo el controlador estudiado en la Sección 6, para un dispositivo háptico de un único grado de libertad. En esta Figura se supone que el entorno virtual consta de objetos virtuales que dependen de las coordenadas cartesianas $\{X(t), \dot{X}(t)\}$, y que incluye el muestreador a su entrada y el dispositivo de retención a su salida.

Cuando se incluye una realimentación háptica, el par exterior, $\tau_e(t)$, que aparece en la articulación del dispositivo háptico cuando el operador humano aplica una fuerza $F_e(t)$, depende de las coordenadas de articulación, es decir,

$$\tau_e(t) = \tau_e(\theta_m(t), \dot{\theta}_m(t)) \quad (9.1)$$

ya que $\tau_e = J^T F_e$, donde J representa el jacobiano del robot, el cual depende de la posición angular, y debido a que F_e depende de la velocidad lineal del extremo del dispositivo háptico, que a su vez depende de la posición angular y de la velocidad angular en el eje del motor.

La ecuación que representa al sistema háptico es la misma que la obtenida en la Sección 4, ecuación 4.7, del motor con carga cuando se aplica una fuerza externa, salvo que ahora $\tau_e(t)$ depende de la posición y velocidad angular,

$$u(t) = J_{eff} \ddot{\theta}_m(t) + B \dot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta} \tau_g(\theta_m(t)) - \frac{r}{\eta} \tau_e(t) \quad (9.2)$$

donde $u(t) = \frac{k_m}{R_m} u_m(t)$, siendo $u_m(t)$ la tensión eléctrica de entrada al motor.

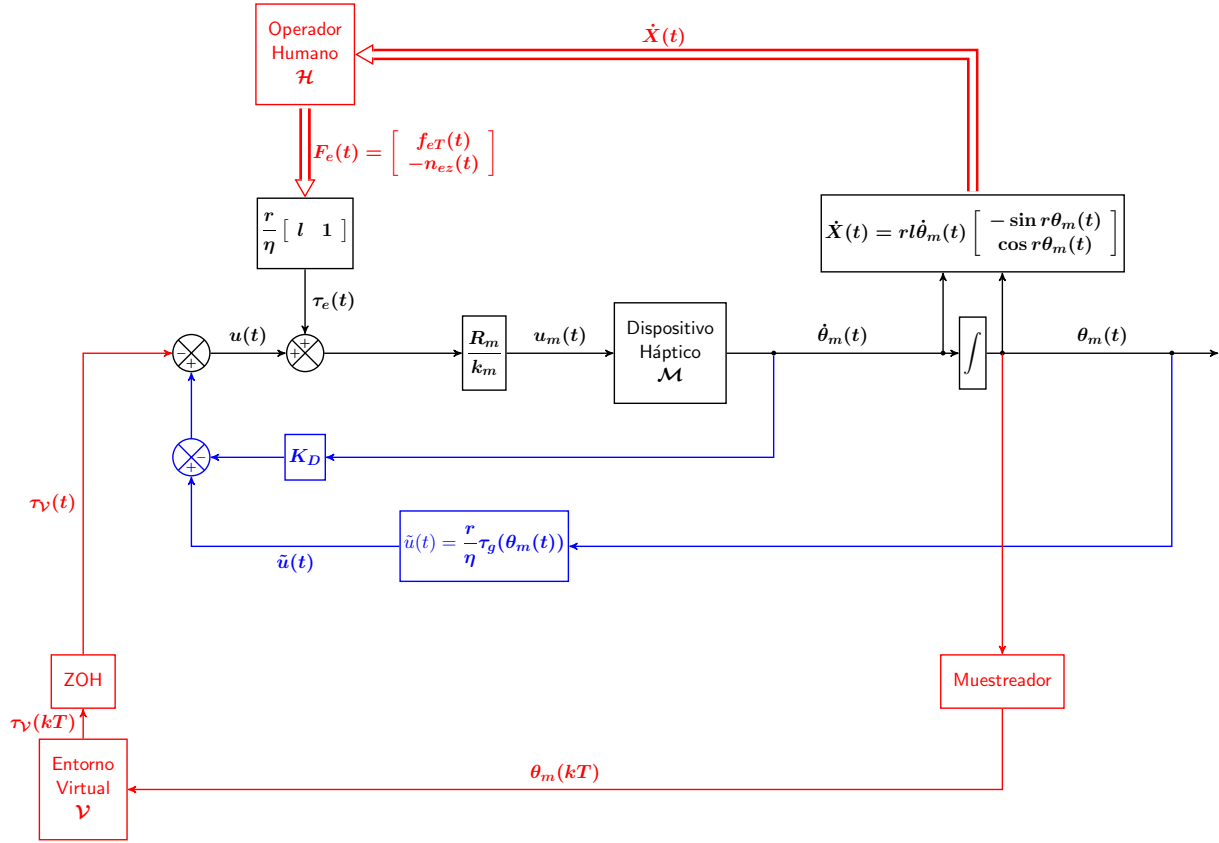


Figura 9.2: Sistema háptico con compensación del par gravitacional de un grado de libertad

Veamos, a continuación, la forma de incorporar el entorno virtual en la dinámica del sistema háptico. En la Figura 9.2 se muestra el esquema de bloques para un dispositivo háptico de un único grado de libertad en el que se ha eliminado la necesidad de resolver el problema cinemático directo ya que el objeto virtual que se va a estudiar, va a representarse en coordenadas de articulación.

Si el entorno virtual consiste en un muelle de torsión con fricción, como el estudiado en la Sección 8, entonces podemos utilizar la relación 8.11 u 8.15 junto con un dispositivo de retención ZOH,

$$\tau_V(k) = a_1(T)\theta_V(k) + a_2(T)\theta_V(k-1) \quad (9.3)$$

siendo $t \in [kT, (k+1)T)$ con $k \in \{k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\}$, y el instante de tiempo de la colisión $t_0 = k_0T$.

Supongamos también que las relaciones entre $\theta_V(t)$ y $\theta_m(t)$ son tales que el objeto virtual sigue la ecuación en diferencias dada por 8.19. Al incluir el ZOH, la ecuación del objeto virtual en $t \in [kT, (k+1)T)$ con $k \in \{k_0 + 1, k_0 + 2, \dots\}$, puede escribirse como,

$$\tau_V(k) = a_V\theta_m(k) + b_V\theta_m(k-1) - a_V\theta_{m0} \quad (9.4)$$

donde se ha hecho $a_V = ra(T)$ y $b_V = r(k_V - a(T))$. Se cumple también que $a_V + b_V = rk_V$.

Incorporar este modelo virtual discreto en la ecuación continua del sistema háptico dada por 9.2 resulta problemático. Existen técnicas para el estudio de sistemas híbridos, en el sentido de que consten de subsistemas continuos y discretos. Una de ellas es suponer que la parte discreta consiste en una discretización exacta de un modelo continuo, de tal manera que suponer que la parte discreta viene dada por su versión continua no conducirá a errores importantes. Esto supone admitir, para el análisis, que el objeto virtual es realmente continuo. En nuestro caso, significa utilizar el modelo 8.1 de la Sección 8, que junto con las relaciones 8.18, tiene la forma

$$\tau_V(t) = rk_V\theta_m(t) + rB_V\dot{\theta}_m(t) - rk_V\theta_{m0} \quad (9.5)$$

Consideremos, ahora, la ley de control definida en la Sección 6 dada por la relación 6.7 donde se añade el par de reacción producido por el entorno virtual,

$$u(t) = -K_D \dot{\theta}_m(t) + \frac{r}{\eta} \tau_g(\theta_m(t)) - \tau_V(t) \quad (9.6)$$

Al sustituir la ley de control dada por 9.6 en la ecuación dinámica del sistema háptico, dada por 9.2, se obtiene la ecuación diferencial que representa al sistema háptico,

$$J_{eff} \ddot{\theta}_m(t) + (B + K_D + rB_V) \dot{\theta}_m(t) + rk_V \theta_m(t) - \frac{r}{\eta} \tau_e(\theta_m(t), \dot{\theta}_m(t)) = rk_V \theta_{m0} \quad (9.7)$$

La resolución de esta ecuación diferencial depende del conocimiento del efecto, a la salida del reductor, de la acción del operador humano, es decir, de $\tau_e(\theta_m(t), \dot{\theta}_m(t))$.

En lo que queda se va a analizar una situación particular, con el fin de comprender uno de los problemas del diseño de sistemas hápticos: el **problema de la estabilidad, y de la aparición en el extremo de la mano de oscilaciones**.

Supongamos que $\tau_e(t)$ depende linealmente de $\theta_m(t)$ y $\dot{\theta}_m(t)$. Es decir, que

$$\frac{r}{\eta} \tau_e(t) = c_0 + c_1 \theta_m(t) + c_2 \dot{\theta}_m(t) \quad (9.8)$$

donde $c_i \in \mathbb{R}$ son parámetros constantes.

Entonces, la ecuación del sistema háptico dada por 9.7, tendrá la forma,

$$J_{eff} \ddot{\theta}_m(t) + (B - c_2 + K_D + rB_V) \dot{\theta}_m(t) + (rk_V - c_1) \theta_m(t) = c_0 + rk_V \theta_{m0} \quad (9.9)$$

con $t > t_0$ y condiciones iniciales $\dot{\theta}_m(t_0) = \dot{\theta}_{m0}$ y $\theta_m(t_0) = \theta_{m0}$.

La ecuación dinámica dada por 9.9 se corresponde con un sistema de segundo orden en posición angular. Dependiendo del valor de los parámetros tendrá una respuesta oscilatoria amortiguada o simplemente amortiguada, si el sistema es estable. Puede demostrarse que si el sistema es estable, $\theta_m(t)$ tenderá, cuando $t \rightarrow \infty$, es decir, en el régimen permanente o estacionario, a una constante dada por

$$\theta_m(\infty) = \frac{c_0 + rk_V \theta_{m0}}{rk_V - c_1} \quad (9.10)$$

donde se supone que $rk_V \neq c_1$.

A continuación se va a comprobar que una condición necesaria, pero no suficiente, para que el sistema sea estable, es que $rk_V - c_1 > 0$. Por lo tanto, el parámetro c_0 de la acción del operador humano, es el que indica el signo de $\theta_m(\infty)$.

En el instante del contacto con el objeto virtual el operador humano realiza un par $\frac{r}{\eta} \tau_e(t_0) = c_0 + c_1 \theta_{m0} + c_2 \dot{\theta}_{m0}$.

Si $\tau_e(t_0) = 0$, entonces $c_0 + c_1 \theta_{m0} + c_2 \dot{\theta}_{m0} = 0$, que al sustituirlo en la relación 9.10, se cumple que

$$\theta_m(\infty) = \theta_{m0} - \frac{c_2}{rk_V - c_1} \dot{\theta}_{m0} \quad (9.11)$$

es decir, que el eje del motor del dispositivo háptico se habrá desplazado, tras la colisión, un ángulo constante dependiente de la velocidad angular inicial $\dot{\theta}_{m0}$. Cuando el operador humano aplica un par nulo, el sentido de movimiento estará determinado por el signo de c_2 y de $\dot{\theta}_{m0}$.

Si $\frac{r}{\eta} \tau_e(t_0) = c_2 \dot{\theta}_{m0}$, entonces $c_0 + c_1 \theta_{m0} = 0$, que al sustituirlo en la relación 9.10, se cumple que

$$\theta_m(\infty) = \theta_{m0} \quad (9.12)$$

es decir, que el eje del motor del dispositivo háptico no se habrá desplazado tras la colisión.

Si $\frac{r}{\eta}\tau_e(t_0) \neq c_2\dot{\theta}_{m0}$ se producirá, en el régimen permanente, un desplazamiento angular constante. Esto indica que el 'modelo de operador humano' dado por 9.8, no es adecuado de manera general, ya que normalmente lo que se desea es que el operador humano pueda mover el dispositivo háptico a cualquier posición. Parece razonable que, al menos c_0 sea una función del tiempo. No obstante, en lo que sigue, supondremos que c_0 es constante, y al final de la Sección se tendrá en cuenta $c_0(t)$.

El sistema será estable si se cumple la condición de que la parte real de las dos raíces de la ecuación compleja siguiente, es negativa:

$$J_{eff}s^2 + (B - c_2 + K_D + rB_V)s + (rk_V - c_1) = 0 \quad (9.13)$$

donde $s \in \mathbb{C}$ y $J_{eff} > 0$. A esta ecuación se la denomina ecuación característica.

Esto significa que los valores de los parámetros de la acción del operador humano, actuando como una admitancia lineal, pueden desestabilizar el sistema. Parece lógico pensar que el operador humano realizará las acciones que sean necesarias para que el sistema sea estable. Sin embargo, puede ocurrir que le resulte muy incómodo, o incluso dañino, intentar que no se produzcan oscilaciones.

Las raíces de la ecuación característica son,

$$s = \frac{(-B + c_2 - K_D - rB_V) \pm \sqrt{(-B + c_2 - K_D - rB_V)^2 - 4J_{eff}(rk_V - c_1)}}{2J_{eff}} \quad (9.14)$$

Se producirán oscilaciones cuando las raíces de la ecuación característica son complejas (que serán complejas conjugadas). Para que no haya oscilaciones el discriminante de la raíz cuadrada debe ser positivo o nulo. Si es nulo, la raíz será real y doble. No analizaremos aquí esta última situación.

Para que el sistema sea estable con oscilaciones, deberá cumplirse que

$$-B + c_2 - K_D - rB_V < 0 \quad (9.15a)$$

$$(-B + c_2 - K_D - rB_V)^2 - 4J_{eff}(rk_V - c_1) < 0 \quad (9.15b)$$

Al ser las raíces de la ecuación característica complejas, el comportamiento del sistema será oscilatorio amortiguado, en posición angular. Como consecuencia también lo será en velocidad angular.

Para que el sistema sea estable sin oscilaciones, deberá cumplirse que

$$-B + c_2 - K_D - rB_V < 0 \quad (9.16a)$$

$$rk_V - c_1 > 0 \quad (9.16b)$$

$$(-B + c_2 - K_D - rB_V)^2 - 4J_{eff}(rk_V - c_1) > 0 \quad (9.16c)$$

En el caso particular en que $c_1 = rk_V$, la ecuación característica tendrá una raíz nula, $s = 0$ y otra raíz dada por,

$$s = \frac{-B + c_2 - K_D - rB_V}{J_{eff}} \quad (9.17)$$

En este caso, la ecuación dinámica dada por 9.9 será

$$J_{eff}\ddot{\theta}_m(t) + (B - c_2 + K_D + rB_V)\dot{\theta}_m(t) = c_0 + rk_V\theta_{m0} \quad (9.18)$$

Podemos observar que esta ecuación es similar al caso estudiado en la Sección 6 cuya solución es 6.10. Si el sistema háptico es estable, es decir, si $c_2 < B + K_D + rB_V$, el comportamiento en velocidad angular no presenta oscilaciones, sino que será una exponencial que tiende, cuando $t \rightarrow \infty$, a una constante durante el intervalo de aplicación de la fuerza, y a cero cuando deja de aplicarse tal fuerza. La posición angular será la integral de la velocidad angular, por lo que haciendo $c_1 = rk_V$ y $c_0(t)$, es decir, variable con el tiempo, será posible que el operador humano desplace angularmente el dispositivo háptico a cualquier posición. Puede verse que esto es así con el estudio realizado en la Sección 6, observando la solución general dada por 6.15.

Aunque no lo vamos a hacer aquí, es posible demostrar que incluso cuando $c_1 \neq rk_V$ pero $c_0(t)$, es decir, variable con el tiempo, se logrará que el operador humano desplace angularmente el

dispositivo háptico a cualquier posición. Esto sugiere que un modelo razonable y sencillo de operador humano a los efectos de análisis del sistema háptico, sea el siguiente,

$$\frac{r}{\eta} \tau_e(t) = c_0(t) + c_1 \theta_m(t) + c_2 \dot{\theta}_m(t) \quad (9.19)$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son parámetros constantes y $c_0(t)$ es una función dependiente del tiempo.

No obstante, el estudio de la estabilidad realizado en esta Sección, no es válido con $c_0(t)$, pero no lo vamos a realizar en este documento.

Un modelo más general de operador humano, puede ser un sistema lineal de parámetros variables de un orden superior al primero, es decir, que incluya derivadas con respecto al tiempo, de orden superior al primero, tanto de $\tau_e(t)$ como de $\theta_m(t)$.

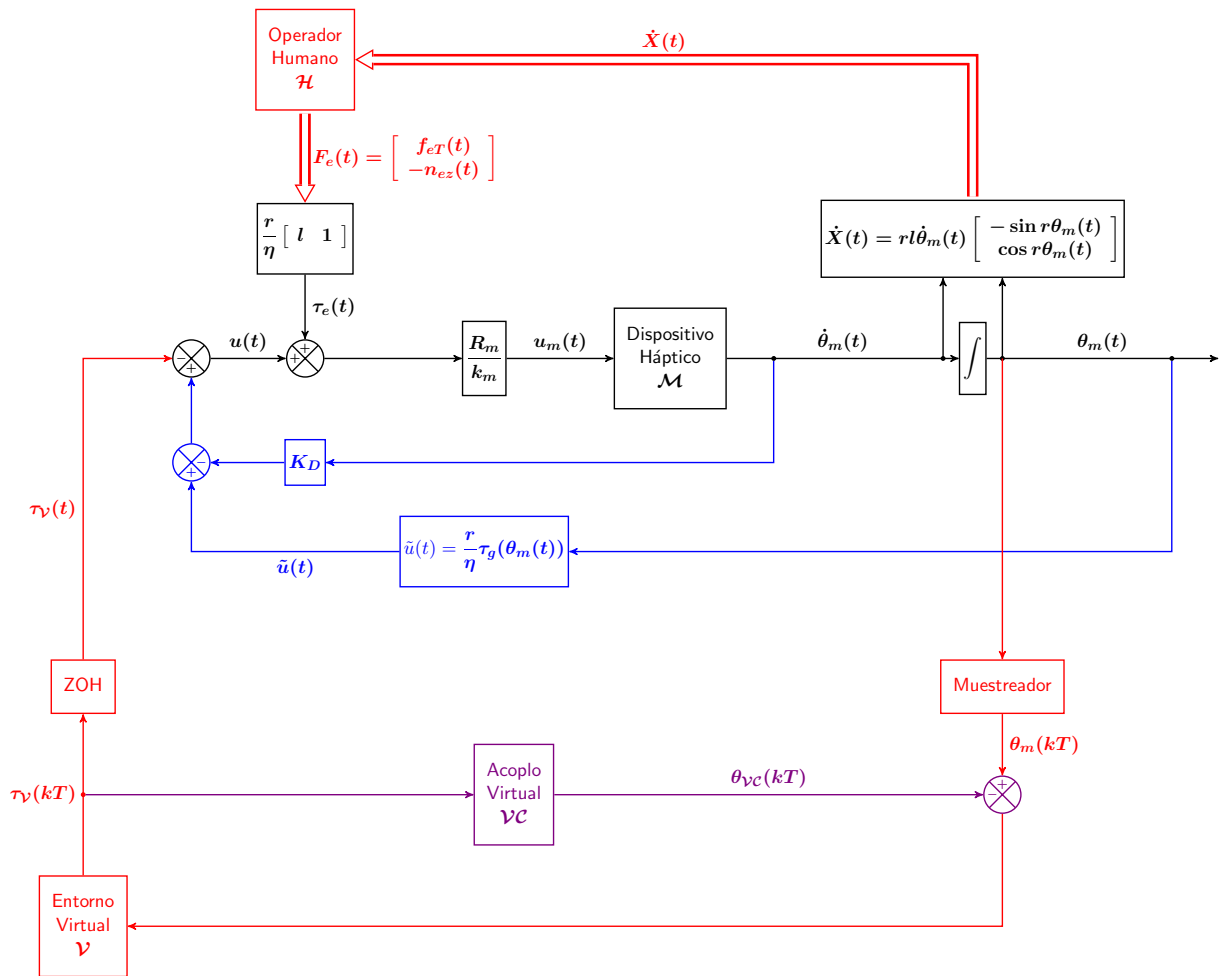


Figura 9.3: Introducción de un Acoplo Virtual

Hay diversas técnicas de eliminación de las oscilaciones, aunque no se va estudiar ninguna de ellas en este documento. No obstante, una de ellas consiste en la introducción de un sistema virtual llamado **Controlador de Acoplo Virtual (Virtual Coupling)** como se muestra en la Figura 9.3. La idea es modificar el comportamiento del objeto virtual en algún sentido, como puede ser la eliminación de oscilaciones. El problema es que la introducción del acoplo virtual produce una distorsión háptica, y por lo tanto perjudica al problema de la transparencia háptica. El diseño del controlador de acoplo virtual, entonces, debe hacerse resolviendo simultáneamente dos objetivos: reducir al mínimo la distorsión háptica y suprimir las oscilaciones indeseadas en el dispositivo háptico. El acoplo virtual puede interpretarse como si existiese un dispositivo o robot virtual entre el dispositivo háptico y el entorno virtual. Es como si el operador humano tomase contacto con el entorno virtual a través de una herramienta intermedia virtual, que amortiguase las oscilaciones en el dispositivo háptico, pero no filtrase las características deseables del objeto virtual.

A. Modelo CVS de fricción de un motor DC

El modelo clásico de fricción o **modelo CVS** (Coulomb plus Viscous plus Static friction) consta de tres componentes, el par de fricción seca o fricción de Coulomb τ_{fC} , el par de fricción viscosa τ_{fV} y el par de fricción estática τ_{fS} (stiction o static friction),

$$\tau_f(t) = \tau_{fC}(t) + \tau_{fV}(t) + \tau_{fS}(t) \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\tau_{fV}(t) = B_m \dot{\theta}_m(t) \quad (\text{A.2a})$$

$$\tau_{fC}(t) = \tau_C \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_m(t)) \quad (\text{A.2b})$$

$$\tau_{fS}(t) = \begin{cases} k_m i(t) - \tau_l(t), & k_m |i(t)| \leq \tau_S, \quad \dot{\theta}_m(t) = \ddot{\theta}_m(t) = 0 \\ \tau_S \operatorname{sgn}(i(t)) - \tau_l(t) - J_m \ddot{\theta}_m(t), & k_m |i(t)| > \tau_S, \quad \dot{\theta}_m(t) = 0, \quad \ddot{\theta}_m(t) \neq 0 \\ 0, & \dot{\theta}_m(t) \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.2c})$$

Los parámetros (B, τ_C, τ_S) representan las constantes de fricción viscosa, de Coulomb y estática respectivamente.

La función signo, $\operatorname{sgn} x$, para cualquier función x , se define como

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Cuando $x \neq 0$, la función signo puede escribirse en la forma

$$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} \quad (\text{A.4})$$

Un modelo de fricción, también clásico, incluye el efecto de Stribeck que se produce a velocidades angulares cercanas al cero. Incluyendo este efecto, el par de fricción $\tau_f(t)$ suele representarse en la forma,

$$\tau_f(t) = \tau_{fC}(t) + \tau_{fV}(t) + (\tau'_{fS}(t) - \tau_{fC}(t)) e^{-\left| \frac{\dot{\theta}_m(t)}{\dot{\theta}_{St}} \right|^{\delta_{St}}} \quad (\text{A.5})$$

donde ahora $\tau'_{fS}(t) = \tau_S \operatorname{sgn}(i(t)) - \tau_l(t) - J_m \ddot{\theta}_m(t)$, y donde $\dot{\theta}_{St}$ es la velocidad angular de Stribeck y δ_{St} la constante de Stribeck. El factor exponencial de la derecha es despreciable cuando las velocidades angulares superan un cierto valor pequeño.

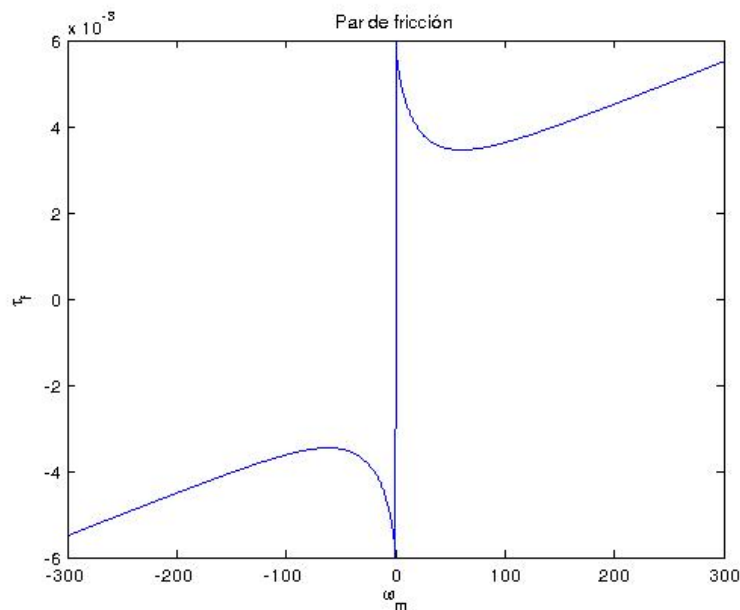


Figura A.1: Par de fricción dado por A.5 en función de $\dot{\theta}_m$

En la Figura A.1 se muestra la curva del par de fricción τ_f en función de $\dot{\theta}_m$, dado por la función A.5. Esta curva se ha obtenido con valores arbitrarios, concretamente con $\tau_S = 0,006$; $B_m = 0,00001$; $\tau_C = 0,0025$; $\dot{\theta}_{St} = 20rpm$; $\delta_{St} = 0,75$. Se ha supuesto también que $\tau_l = \ddot{\theta}_m = 0$ y que $\text{sgn}(i) = \text{sgn}(\dot{\theta}_m)$. Puede observarse que se ha elegido $\tau_S > \tau_C$ como suele ser el caso en los motores reales.

El modelo CVS, es decir, sin considerar el efecto de Stribeck, puede simularse aproximadamente con la ecuación,

$$\tau_f(t) = \tau_{fC}(t) + \tau_{fV}(t) + (\tau'_{fS}(t) - \tau_{fC}(t)) e^{-\alpha|\dot{\theta}_m(t)|} \quad (\text{A.6})$$

donde α sea un valor muy elevado.

El par de fricción estática actúa cuando el eje del motor está inmóvil o cuando hay un cambio en el sentido de giro del eje del motor (cuando la aceleración angular $\ddot{\theta}_m(t) \neq 0$). Como vemos, lo que hace el par de fricción estática τ_{fS} en la situación de arranque del motor, es impedir el movimiento del eje del motor hasta que la corriente eléctrica supere un valor constante. La variación temporal se debe a la variación de la corriente eléctrica $i(t)$, es decir que en el arranque, $i(t) \neq 0$, y puede calcularse a partir de la ecuación eléctrica del motor.

En esta situación de fricción estática la ecuación eléctrica toma la forma

$$u_m(t) = R_m i(t) + L_m \frac{di(t)}{dt} \quad (\text{A.7})$$

Si se hace $u_m(t) = U_a$, donde U_a es una constante, la corriente eléctrica tenderá en régimen permanente a un valor U_a/R_m . Si este valor es menor que τ_S/k_m el motor permanecerá inmóvil. Esto significa que habrá una tensión de arranque (break-away voltage o starting voltage) a partir de la cual el motor comenzará a moverse, pero permanecerá inmóvil por debajo de ella. Este fenómeno puede apreciarse introduciendo al motor una tensión en forma de rampa de pequeña pendiente. Se producirá entonces un retardo temporal en la velocidad angular del motor, que durará hasta que la corriente eléctrica alcance un determinado valor.

Llamaremos $\tau_c(t)$ a

$$\tau_c(t) = \tau_{fS}(t) + \tau_{fC}(t) + \tau_l(t) \quad (\text{A.8})$$

Con esta definición la ecuación mecánica del motor queda representada en la forma

$$k_m i(t) = J_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m(t)}{dt} + \tau_c(t) \quad (\text{A.9})$$

B. Tensor de inercia y centro de masas del sólido rígido

Dado un sistema de referencia \mathcal{S} se denomina tensor o matriz de inercia alrededor de \mathcal{S} (cuyo origen se denomina centro de rotación) a la matriz simétrica siguiente,

$$I = \int_{\Gamma} S(r)^T S(r) dm \quad (\text{B.1})$$

donde dm representa la masa infinitesimal, Γ la región espacial ocupada por el objeto, $r = (x, y, z)$ el vector de un punto cualquiera del objeto en coordenadas de \mathcal{S} , y $S(r)$ la matriz antisimétrica dada por

$$S(r) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

La matriz $S(r)$ es antisimétrica por lo que $S(r)^T S(r) = -S(r)^2$.

Desarrollando B.1 podemos ver que el tensor de inercia alrededor de \mathcal{S} tiene la forma,

$$I = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} (y^2 + z^2) dm & - \int_{\Gamma} xy dm & - \int_{\Gamma} xz dm \\ - \int_{\Gamma} xy dm & \int_{\Gamma} (x^2 + z^2) dm & - \int_{\Gamma} yz dm \\ - \int_{\Gamma} xz dm & - \int_{\Gamma} yz dm & \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

A los elementos de la diagonal principal de esta matriz se les denomina momentos de inercia alrededor de los ejes X, Y, Z respectivamente y a los de fuera de la diagonal productos de inercia.

Es habitual escribir el tensor de inercia en la forma,

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

donde $I = I^T$.

El centro de masas $r_c = (x_c, y_c, z_c)^T$ de un sólido rígido se define como

$$x_c = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} x dm \quad (\text{B.5a})$$

$$y_c = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} y dm \quad (\text{B.5b})$$

$$z_c = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} z dm \quad (\text{B.5c})$$

donde $m = \int_{\Gamma} dm$, y $r = (x, y, z)^T$ las coordenadas de un punto cualquiera del objeto en algún sistema de referencia \mathcal{S} .

Podemos escribir el centro de masas $r_c = (x_c, y_c, z_c)^T$ en la forma compacta siguiente,

$$r_c = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} r dm \quad (\text{B.6})$$

Sustituyendo $r = \Delta r + r_c$ en la ecuación B.6 y simplificando se cumple que

$$\int_{\Gamma} \Delta r dm = 0 \quad (\text{B.7})$$

Puesto que las matrices de rotación son invertibles se cumple la relación B.7 en la que Δr esté expresado en cualquier sistema de referencia.

Si el sólido rígido se mueve, el tensor de inercia será variable. Sin embargo si se escoge un sistema de referencia situado en el centro de masas \mathcal{S}_c , el tensor de inercia será constante. Llamaremos I_c al tensor de inercia alrededor de \mathcal{S}_c . Entonces, por definición

$$I_c = \int_{\Gamma} S(\Delta r)^T S(\Delta r) dm \quad (\text{B.8})$$

donde $\Delta r = r - r_c$ es el vector de un punto cualquiera del objeto expresado en coordenadas de \mathcal{S}_c .

Puesto que el tensor de inercia I_c es una matriz simétrica de coeficientes reales, entonces siempre es diagonalizable, lo que significa que es posible encontrar una matriz invertible constante Λ cuyos vectores columna son los autovectores de I_c , que satisface la relación

$$I_c = \Lambda I_D \Lambda^{-1} \quad (\text{B.9})$$

donde I_D es una matriz diagonal

$$I_D = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

siendo $I_x, I_y, I_z \in \mathbb{R}$ los momentos de inercia alrededor de los ejes principales de un elipsoide de centro el centro de masas, llamados ejes principales de inercia.

La matriz Λ es una matriz ortogonal, ya que representa la rotación del sistema formado por los ejes principales de inercia relativos al sistema de referencia \mathcal{S}_c . Por lo tanto $\Lambda^{-1} = \Lambda^T$.

C. Energía cinética del sólido rígido

La energía cinética K de un sólido rígido se define como

$$K = \int_{\Gamma} v^T(x, y, z)v(x, y, z)\rho(x, y, z)dxdydz = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} v^T(x, y, z)v(x, y, z)dm \quad (\text{C.1})$$

donde dm representa la masa infinitesimal, Γ la región espacial ocupada por el objeto, ρ la densidad de cada punto del objeto y v el vector velocidad lineal de cada punto del objeto situado en las coordenadas (x, y, z) de algún sistema de referencia \mathcal{S} .

La ecuación cinemática de velocidad puede escribirse de la siguiente forma para cualquier punto P de un sólido rígido, donde las coordenadas de todos los vectores están expresados en el sistema de referencia inercial \mathcal{S}_0 ,

$$v_0 = v_c + S(w)\Delta r_0 \quad (\text{C.2})$$

donde v_0 representa la velocidad lineal del punto P , v_c la velocidad del centro de masas del sólido rígido, w la velocidad angular del sólido rígido, Δr_0 el vector que une el punto P con el centro de masas y $S(w)$ la matriz antisimétrica dada por

$$S(w) = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Para el cálculo de la energía cinética es necesario calcular el producto escalar $v_0^T v_0$,

$$v_0^T v_0 = v_c^T v_c + 2v_c^T S(w)\Delta r_0 + (\Delta r_0)^T S(w)^T S(w)\Delta r_0 \quad (\text{C.4})$$

donde se ha tenido en cuenta que el valor de un escalar coincide con su traspuesta, $v_c^T S(w)\Delta r_0 = (v_c^T S(w)\Delta r_0)^T = (\Delta r_0)^T S^T(w)v_c$.

Por un lado se cumple por definición que,

$$\int_{\Gamma} v_c^T v_c dm = m v_c^T v_c \quad (\text{C.5})$$

y por otro, teniendo en cuenta la ecuación B.7

$$\int_{\Gamma} 2v_c^T S(w)\Delta r_0 dm = 2v_c^T S(w) \int_{\Gamma} \Delta r_0 dm = 0 \quad (\text{C.6})$$

Por lo tanto, para el cálculo de la energía cinética solo queda por resolver la siguiente integral:

$$K' = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\Delta r_0)^T S(w)^T S(w)\Delta r_0 dm \quad (\text{C.7})$$

Escogiendo como matriz de rotación R la que transforma el sistema de referencia situado en el centro de masas \mathcal{S}_c en el sistema de referencia inercial \mathcal{S}_0 ,

$$(\Delta r_0)^T S(w)^T S(w)\Delta r_0 = (Rw)^T S(R\Delta r_0)^T S(R\Delta r_0)Rw = \tilde{w}^T S(\Delta r)^T S(\Delta r)\tilde{w} \quad (\text{C.8})$$

donde se ha tenido en cuenta que $S(a)b = -S(b)a$, $S(a)b = R^T S(Ra)Rb$ y $R^T R = I$, para vectores cualesquiera a, b y matrices de rotación R .

De aquí que

$$K' = \frac{1}{2} \tilde{w}^T \left(\int_{\Gamma} S(\Delta r)^T S(\Delta r) dm \right) \tilde{w} = \frac{1}{2} \tilde{w}^T I_c \tilde{w} \quad (\text{C.9})$$

donde Δr es el vector de un punto cualquiera del objeto tomado desde el centro de masas en coordenadas relativas al sistema fijo situado en el centro de masas e I_c el tensor de inercia constante alrededor del centro de masas definido en el Apéndice B.

Por lo tanto la energía cinética de un sólido rígido puede expresarse como suma de dos componentes: la energía cinética traslacional y la energía cinética rotacional,

$$K = \frac{1}{2} m v_c^T v_c + \frac{1}{2} \tilde{w}^T I_c \tilde{w} \quad (\text{C.10})$$

D. Energía potencial del sólido rígido

La energía potencial V de un sólido rígido representa el trabajo necesario para transportar su centro de masas desde un plano tomado como referencia a una posición dada. Tomaremos como plano de referencia el suelo horizontal, es decir el plano x_0y_0 del sistema de referencia inercial \mathcal{S}_0 .

La energía potencial de un sólido rígido se define como

$$V = -m\mathbf{g}^T r_c \quad (\text{D.1})$$

donde m representa la masa, \mathbf{g} el vector de aceleración de la gravedad y r_c el vector que une el centro de masas con el origen de coordenadas del sistema de referencia inercial \mathcal{S}_0 .

Puesto que se ha escogido el plano de referencia como el plano x_0y_0 del sistema de referencia inercial \mathcal{S}_0 se cumple que

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

donde g representa la constante de aceleración de la gravedad.

Por lo tanto

$$V = mgr_{cz} \quad (\text{D.3})$$

donde r_{cz} es la componente en z del centro de masas expresado en las coordenadas del sistema de referencia inercial \mathcal{S}_0 .

De manera general expresaremos la energía potencial de un sólido rígido en la forma

$$V = mgr_c^T u_z \quad (\text{D.4})$$

donde $u_z = [0 \ 0 \ 1]^T$.

Puesto que plano de referencia puede ser cualquiera, es posible elegir cualquier sistema de referencia paralelo a \mathcal{S}_0 sin que cambie \mathbf{g} dado por D.2, y por otro lado r_c cambiaría en un valor constante. Esto significa que la energía potencial puede definirse de una forma más general, como

$$V = c + mgr_c^T u_z \quad (\text{D.5})$$

donde c es una constante cualquiera.

La constante c se elige normalmente de tal manera que la energía potencial sea nula en la posición de equilibrio estable del sólido rígido. De esta manera se cumple la idea intuitiva de que la energía potencial sea la energía almacenada en un sólido rígido inmerso en un campo gravitatorio. Por ejemplo, para un péndulo simple se elige de tal forma que $V = 0$ cuando el péndulo está en su posición estable (en reposo), es decir, "hacia abajo".

Otro criterio para la selección de la constante es que la energía potencial sea positiva en todo punto posible del movimiento del sólido rígido.

E. Ecuaciones dinámicas de un mecanismo de sólidos rígidos

Se conocen diversas formas de obtener las ecuaciones del movimiento o ecuaciones dinámicas de los robots. Las dos más importantes son las llamadas ecuaciones de Newton-Euler y las de Euler-Lagrange.

Las primeras están basadas en la ley de Newton para movimientos traslacionales de los sólidos rígidos y en la ley equivalente de Euler para movimientos rotacionales,

$$f = \frac{dp}{dt} \quad (\text{E.1a})$$

$$\tau = \frac{dL}{dt} \quad (\text{E.1b})$$

donde p es la cantidad de movimiento o momento lineal, L el momento angular, f el vector de las fuerzas externas totales y τ el vector de los pares externos totales aplicados al sólido rígido.

Las ecuaciones de Newton-Euler para un mecanismo de N sólidos rígidos consiste en un sistema de $2N$ ecuaciones de la forma E.1 para cada sólido rígido, imponiendo restricciones en las fuerzas de las articulaciones que satisfacen el principio de acción y reacción.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange están basadas en principios variacionales, concretamente en el principio de los trabajos virtuales de D'Alembert.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales, se cumple la siguiente relación para un sistema de n grados de libertad:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1 \dots n \quad (\text{E.2})$$

donde K es la energía cinética de todo el sistema, q_i una coordenada generalizada y Q_i una fuerza generalizada.

Si además las fuerzas son conservativas, entonces derivan de un potencial $V(q)$ que solo depende de la posición, es decir,

$$Q_i = Q'_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (\text{E.3})$$

donde V representa la energía potencial de todo el sistema.

Se define el Lagrangiano como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial $L = K - V$, entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i, \quad i = 1 \dots n \quad (\text{E.4})$$

Hemos visto que la energía cinética puede expresarse en la forma $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q}$ siendo $D(q)$ una matriz simétrica, entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (D(q) \dot{q}) = D(q) \ddot{q} + \dot{D}(q) \dot{q} \quad (\text{E.5a})$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial [\dot{q}^T D(q) \dot{q}]}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} = \left(\dot{D}(q) - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} - g(q) \quad (\text{E.5b})$$

donde $C(q, \dot{q})$ una matriz cuadrada de orden n y $g(q) = \frac{\partial V}{\partial q}$.

En el Apéndice G se demuestra que

$$C(\dot{q}, q) = \begin{bmatrix} \dot{q}^T C_1(q) \\ \dot{q}^T C_2(q) \\ \vdots \\ \dot{q}^T C_n(q) \end{bmatrix} \quad (\text{E.6})$$

siendo $C_k(q)$ matrices simétricas de la forma

$$C_k(q) = \begin{bmatrix} c_{k,11} & c_{k,12} & \dots & c_{k,1n} \\ c_{k,21} & c_{k,22} & \dots & c_{k,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,n1} & c_{k,n2} & \dots & c_{k,nn} \end{bmatrix} \quad (\text{E.7})$$

donde $c_{k,ij}$ son los símbolos de Christoffel de primera especie, definidos como

$$c_{k,ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial y_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial y_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial y_k} \right\} \quad (\text{E.8})$$

Por lo tanto podemos expresar las ecuaciones de Euler-Lagrange en la forma

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = Q' \quad (\text{E.9})$$

A los términos en los que aparecen las formas \dot{q}_i^2 se les llama centrífugos y en los que aparecen las formas $\dot{q}_i \dot{q}_j$ con $j \neq i$ se les llama términos de Coriolis. A los términos en los que aparece \ddot{q}_i se les llama inerciales, y a los de $g_i(q)$ gravitatorios.

F. Ecuaciones dinámicas en el espacio cartesiano

La cinemática directa de velocidad y de aceleración permite establecer una relación entre las velocidades y aceleraciones generalizadas a través del Jacobiano del robot,

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (\text{F.1a})$$

$$\ddot{X} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q} \quad (\text{F.1b})$$

donde \dot{X} representa el vector de velocidad lineal y angular del extremo de la mano del robot y \ddot{X} representa el vector de aceleración lineal y angular del extremo de la mano del robot.

Si el Jacobiano del robot es invertible, la ecuación dinámica puede expresarse en el espacio cartesiano o espacio de tareas como,

$$D(q)J(q)^{-1} \left(\ddot{X} - \dot{J}(q)J(q)^{-1}\dot{X} \right) + C(q, \dot{q})J(q)^{-1}\dot{X} + g(q) = J(q)^T F - BJ(q)^{-1}\dot{X} \quad (\text{F.2})$$

donde se ha incluido una fuerza externa F y un par de fricción viscosa, cuya matriz diagonal de coeficientes de fricción es B .

Esta relación puede escribirse en la forma,

$$\tilde{D}(q)\ddot{X} + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{X} + g(q) = J(q)^T F - \tilde{B}\dot{X} \quad (\text{F.3})$$

G. Coeficientes de la matriz $C(q, \dot{q})$ de las ecuaciones dinámicas, y algunas propiedades estructurales

Proposición G.1. *Toda matriz cuadrada puede expresarse como suma de una matriz simétrica $S = S^T$ y otra antisimétrica $T = -T^T$*

$$A = S + T \quad (\text{G.1})$$

donde

$$S = \frac{A + A^T}{2} \quad (\text{G.2a})$$

$$T = \frac{A - A^T}{2} \quad (\text{G.2b})$$

Proposición G.2. *Dada una matriz antisimétrica T de orden n , y cualquier matriz x de dimensión $[n \times 1]$ se cumple que*

$$x^T T x = 0 \quad (\text{G.3})$$

Proposición G.3. *Si una matriz cuadrada $B(x, y)$ se puede poner en la forma*

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} x^T B_1(y) \\ x^T B_2(y) \\ \vdots \\ x^T B_n(y) \end{bmatrix} \quad (\text{G.4})$$

donde $B_k(y)$ son matrices simétricas de orden n , entonces existen matrices S y T respectivamente simétrica y antisimétrica, tales que

$$S + T = B^T \quad (\text{G.5a})$$

$$S - T = B \quad (\text{G.5b})$$

y se pueden poner en la forma

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} x^T S_1(y) \\ x^T S_2(y) \\ \vdots \\ x^T S_n(y) \end{bmatrix} \quad (\text{G.6a})$$

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} x^T T_1(y) \\ x^T T_2(y) \\ \vdots \\ x^T T_n(y) \end{bmatrix} \quad (\text{G.6b})$$

donde $S_k(y) \forall k$ y $T_k(y) \forall k$ son matrices que satisfacen la relación

$$S_k - T_k = B_k \quad (\text{G.7})$$

Además, T_k es antisimétrica si y solamente si $B_k = \frac{S_k + S_k^T}{2}$. En este caso $T_k = \frac{S_k - S_k^T}{2}$.

Demostración. Si $T_k = S_k - B_k \forall k$ y T, S tienen la forma de la proposición, entonces, $T = S - B$.

Aunque las matrices $B_k \forall k$ sean simétricas, no tiene por qué serlo la matriz B . Y de la misma forma, aunque S sea simétrica no tienen por qué serlo las matrices S_k .

Veamos ahora la existencia de T y S en la forma dada en la Proposición.

Sabemos por la Proposición G.1 que existen las matrices $S' = \frac{B + B^T}{2}$ y $T' = \frac{B^T - B}{2}$ respectivamente simétrica y antisimétrica.

Teniendo en cuenta que $B_k \forall k$ son matrices simétricas, las matrices B y B^T se pueden escribir en la forma

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} x^T B_1(y) \\ x^T B_2(y) \\ \vdots \\ x^T B_n(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T B_{11}(y) & x^T B_{12}(y) & \dots & x^T B_{1n}(y) \\ x^T B_{21}(y) & x^T B_{22}(y) & \dots & x^T B_{2n}(y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^T B_{n1}(y) & x^T B_{n2}(y) & \dots & x^T B_{nn}(y) \end{bmatrix} \quad (\text{G.8a})$$

$$B(x, y)^T = [B_1(y)^T x \quad B_2(y)^T x \quad \dots \quad B_n(y)^T x] = \begin{bmatrix} B_{11}(y)^T x & B_{21}(y)^T x & \dots & B_{n1}(y)^T x \\ B_{12}(y)^T x & B_{22}(y)^T x & \dots & B_{n2}(y)^T x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1n}(y)^T x & B_{2n}(y)^T x & \dots & B_{nn}(y)^T x \end{bmatrix} \quad (\text{G.8b})$$

donde B_{kj} son matrices columna.

Por lo tanto los elementos S'_{kj} y T'_{kj} tendrán la forma

$$2S'_{kj} = x^T B_{kj}(y) + B_{jk}^T(y)x \quad (\text{G.9a})$$

$$2T'_{kj} = B_{jk}^T(y)x - x^T B_{kj}(y) \quad (\text{G.9b})$$

Puesto que $z_{kj} = x^T B_{kj}$ es un escalar, deberá coincidir con su traspuesta, $z_{kj} = z_{kj}^T = B_{jk}^T x$, por lo que

$$2S'_{kj} = (B_{kj}^T + B_{jk}^T) x = x^T (B_{kj} + B_{jk}) \quad (\text{G.10a})$$

$$2T'_{kj} = (B_{jk}^T - B_{kj}^T) x = x^T (B_{jk} - B_{kj}) \quad (\text{G.10b})$$

En consecuencia S'_k y T'_k tendrán la forma

$$S'_k(y) = \left[\frac{B_{k1} + B_{1k}}{2} \quad \frac{B_{k2} + B_{2k}}{2} \quad \dots \quad B_{kk} \quad \dots \quad \frac{B_{kn} + B_{nk}}{2} \right] \quad (\text{G.11a})$$

$$T'_k(y) = \left[\frac{B_{1k} - B_{k1}}{2} \quad \frac{B_{2k} - B_{k2}}{2} \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad \frac{B_{nk} - B_{kn}}{2} \right] \quad (\text{G.11b})$$

Los elementos de estas matrices tienen la forma

$$s'_{k,ij}(y) = \frac{b_{k,ij} + b_{i,kj}}{2} \quad (\text{G.12a})$$

$$t'_{k,ij}(y) = \frac{b_{i,kj} - b_{k,ij}}{2} \quad (\text{G.12b})$$

Por lo tanto, restando ambas expresiones

$$t'_{k,ij}(y) - s'_{k,ij}(y) = b_{k,ij} \quad (\text{G.13})$$

Como consecuencia $T'_k = S'_k + B_k$.

Si $t'_{k,ij} = -t'_{k,ji}$, entonces

$$b_{i,kj} + b_{j,ki} = 2b_{k,ij} \quad (\text{G.14})$$

Por lo tanto

$$s'_{k,ij}(y) + s'_{k,ji}(y) = b_{k,ij} + \frac{b_{i,kj} + b_{j,ki}}{2} = 2b_{k,ij} \quad (\text{G.15})$$

□

Proposición G.4. Sea $c(x, y) = x^T A(y)x$ una forma cuadrática con $A(y)$ una matriz simétrica dependiente de y , y x e y matrices columna independientes de dimensión $[n \times 1]$.

Se cumple que existen matrices simétricas $A_k(y) \forall k$ tales que

$$\frac{\partial c(x, y)}{\partial y} = U(x, y)x \quad (\text{G.16})$$

donde

$$U(x, y) = \begin{bmatrix} x^T A_1(y) \\ x^T A_2(y) \\ \vdots \\ x^T A_n(y) \end{bmatrix} \quad (\text{G.17})$$

Demostración. Llamemos $u(x, y)$ a la matriz columna siguiente,

$$u(x, y) = \frac{\partial c(x, y)}{\partial y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c(x, y)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial c(x, y)}{\partial y_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial c(x, y)}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \\ \vdots \\ u_n(x, y) \end{bmatrix} \quad (\text{G.18})$$

Podemos escribir también cada elemento de u como

$$u_k(x, y) = \frac{\partial c(x, y)}{\partial y_k} \quad (\text{G.19})$$

Teniendo en cuenta que $c(x, y) = x^T A(y)x$ donde x, y son independientes, se cumple que

$$u_k(x, y) = x^T \frac{\partial A(y)}{\partial y_k} x \quad (\text{G.20})$$

donde

$$\frac{\partial A(y)}{\partial y_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial y_k} & \frac{\partial a_{12}}{\partial y_k} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial y_k} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial y_k} & \frac{\partial a_{22}}{\partial y_k} & \cdots & \frac{\partial a_{2n}}{\partial y_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial y_k} & \frac{\partial a_{n2}}{\partial y_k} & \cdots & \frac{\partial a_{nn}}{\partial y_k} \end{bmatrix} = A_k(y) \quad (\text{G.21})$$

Puesto que A es una matriz simétrica, la matriz $A_k(y)$ también será simétrica, y

$$u_k(x, y) = x^T A_k(y)x \quad (\text{G.22})$$

Y de aquí que

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} x^T A_1 \\ x^T A_2 \\ \vdots \\ x^T A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Ux \quad (\text{G.23})$$

□

Proposición G.5. Sea $A(y)$ una matriz simétrica dependiente de la matriz columna $y = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n]^T$. Se cumple que existen las matrices simétricas $S_k(y)$, $\forall k$ tal que

$$\dot{A}(y)\dot{y} = B(\dot{y}, y)\dot{y} \quad (\text{G.24})$$

donde

$$B(\dot{y}, y) = \begin{bmatrix} \dot{y}^T S_1(y) \\ \dot{y}^T S_2(y) \\ \vdots \\ \dot{y}^T S_n(y) \end{bmatrix} \quad (\text{G.25})$$

Demostración. Se cumple que

$$\dot{a}_{kj}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{kj}(y)}{\partial y_i} \dot{y}_i \quad (\text{G.26})$$

Llamemos $\dot{A}_k(y)$ a la fila k-ésima de $\dot{A}(y)$,

$$\dot{A}_k(y) = [\dot{y}_1 \ \dot{y}_2 \ \cdots \ \dot{y}_n] \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{k1}}{\partial y_1} & \frac{\partial a_{k2}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial a_{kn}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial a_{k1}}{\partial y_2} & \frac{\partial a_{k2}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial a_{kn}}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{k1}}{\partial y_n} & \frac{\partial a_{k2}}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial a_{kn}}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \dot{y}^T H_k(y) \quad (\text{G.27})$$

Teniendo en cuenta las Proposiciones G.1 y G.2, la matriz $H_k(y)$ puede expresarse como suma de una matriz simétrica $S_k(y)$ y una matriz antisimétrica $T_k(y)$, donde

$$S_k(y) = \frac{H_k(y) + H_k^T(y)}{2} \quad (\text{G.28a})$$

$$0 = \dot{y}^T T_k(y) \dot{y} \quad (\text{G.28b})$$

Llamando $b_k(\dot{y}, y)$ al producto de $\dot{A}_k(y)$ por \dot{y} , se cumple que

$$b_k(\dot{y}, y) = \dot{A}_k(y)\dot{y} = \dot{y}^T H_k(y)\dot{y} = \dot{y}^T S_k(y)\dot{y} \quad (\text{G.29})$$

donde $S_k(y)$ es la siguiente matriz simétrica

$$S_k(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{k1}}{\partial y_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{k1}}{\partial y_2} + \frac{\partial a_{k2}}{\partial y_1} \right) & \cdots & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{k1}}{\partial y_n} + \frac{\partial a_{kn}}{\partial y_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{k2}}{\partial y_1} + \frac{\partial a_{k1}}{\partial y_2} \right) & \frac{\partial a_{k2}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{k2}}{\partial y_n} + \frac{\partial a_{kn}}{\partial y_2} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kn}}{\partial y_1} + \frac{\partial a_{k1}}{\partial y_n} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kn}}{\partial y_2} + \frac{\partial a_{k2}}{\partial y_n} \right) & \cdots & \frac{\partial a_{kn}}{\partial y_n} \end{bmatrix} \quad (\text{G.30})$$

□

Proposición G.6. Se cumple que

$$\dot{D}(y)\dot{y} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\dot{y}^T D(y)\dot{y})}{\partial y} = C(\dot{y}, y)\dot{y} \quad (\text{G.31})$$

donde $D(y)$ es una matriz simétrica y la matriz $C(\dot{y}, y)$ puede escribirse en la forma

$$C(\dot{y}, y) = \begin{bmatrix} \dot{y}^T C_1(y) \\ \dot{y}^T C_2(y) \\ \vdots \\ \dot{y}^T C_n(y) \end{bmatrix} \quad (\text{G.32})$$

siendo $C_k(y)$ matrices simétricas de la forma

$$C_k(y) = \begin{bmatrix} c_{k,11} & c_{k,12} & \cdots & c_{k,1n} \\ c_{k,21} & c_{k,22} & \cdots & c_{k,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,n1} & c_{k,n2} & \cdots & c_{k,nn} \end{bmatrix} \quad (\text{G.33})$$

donde $c_{k,ij}$ son los símbolos de Christoffel de primera especie, definidos como

$$c_{k,ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial y_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial y_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial y_k} \right\} \quad (\text{G.34})$$

Demostración. Se deduce inmediatamente de las Proposiciones G.3 y G.4. \square

Proposición G.7. Se cumple que

$$\dot{D}(y) = 2C(\dot{y}, y) + N(\dot{y}, y) \quad (\text{G.35a})$$

$$\dot{D}(y) = C(\dot{y}, y)^T + C(\dot{y}, y) \quad (\text{G.35b})$$

$$N(\dot{y}, y) = C(\dot{y}, y)^T - C(\dot{y}, y) \quad (\text{G.35c})$$

donde $N(\dot{y}, y)$ es una matriz antisimétrica que puede escribirse en la forma

$$N(\dot{y}, y) = \begin{bmatrix} \dot{y}^T N_1(y) \\ \dot{y}^T N_2(y) \\ \vdots \\ \dot{y}^T N_n(y) \end{bmatrix} \quad (\text{G.36})$$

donde

$$N_k = H_k - 2C_k \quad (\text{G.37})$$

con

$$H_k(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_{k1}}{\partial y_1} & \frac{\partial d_{k2}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial d_{kn}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial d_{k1}}{\partial y_2} & \frac{\partial d_{k2}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial d_{kn}}{\partial y_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial d_{k1}}{\partial y_n} & \frac{\partial d_{k2}}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial d_{kn}}{\partial y_n} \end{bmatrix} \quad (\text{G.38a})$$

$$C_k(y) = \begin{bmatrix} c_{k,11} & c_{k,12} & \cdots & c_{k,1n} \\ c_{k,21} & c_{k,22} & \cdots & c_{k,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,n1} & c_{k,n2} & \cdots & c_{k,nn} \end{bmatrix} \quad (\text{G.38b})$$

$$c_{k,ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial y_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial y_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial y_k} \right\} \quad (\text{G.38c})$$

Además, la fila k -ésima de N_k es nula, y llamando $n_{k,ij}$ al elemento ij -ésimo de N_k , se cumple que $n_{k,ij}(y) + n_{i,kj}(y) = 0$, propiedades que reducen el cómputo de las matrices N_i .

Demostración. La matriz C satisface las condiciones de la Proposición G.3, es decir C_k son matrices simétricas. Además \dot{D} tiene la forma dada en esta misma proposición y es simétrica.

Se ha visto en la Proposición G.3 que

$$s_{k,ij}(y) = \frac{b_{k,ij} + b_{i,kj}}{2} \quad (\text{G.39a})$$

$$t_{k,ij}(y) = \frac{b_{i,kj} - b_{k,ij}}{2} \quad (\text{G.39b})$$

Haciendo $B = 2C$, y sustituyendo los símbolos de Christoffel,

$$c_{k,ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial y_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial y_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial y_k} \right\} \quad (\text{G.40a})$$

$$c_{i,kj} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{ij}}{\partial y_k} + \frac{\partial d_{ik}}{\partial y_j} - \frac{\partial d_{kj}}{\partial y_i} \right\} \quad (\text{G.40b})$$

y teniendo en cuenta que D es simétrica, se cumple que

$$s_{k,ij}(y) = c_{k,ij} + c_{i,kj} = \frac{\partial d_{ki}}{\partial y_j} \quad (\text{G.41a})$$

$$t_{k,ij}(y) = c_{i,kj} - c_{k,ij} = \frac{\partial d_{ij}}{\partial y_k} - \frac{\partial d_{kj}}{\partial y_i} \quad (\text{G.41b})$$

Por lo tanto $S = \dot{D}$, y $T_k = S_k - B_k = H_k - 2C_k$. Por lo tanto basta con hacer $N_k = T_k$ por lo que N es antisimétrica.

Puesto que en general $s_{k,ij} + s_{k,ji} \neq 4c_{k,ij}$, entonces, en general N_k no será antisimétrica.

Podemos ver que $t_{k,ij}(y) + t_{i,kj}(y) = 0$, propiedad que reduce el cómputo de las matrices T_k , ya que dada T_k se obtiene una fila de cada matriz T_i .

Además si $k = i$, entonces $t_{k,kj}(y) = 0$, por lo que la fila k -ésima de T_k es nula.

También se cumple que $t_{k,ij} - t_{k,ji} = t_{j,ik}$, por lo que por cada fila y columna de T_k se obtiene una columna de T_j . □

Proposición G.8. Diremos que la coordenada generalizada q_k es una coordenada quasi-cíclica si la energía cinética no depende explícitamente de q_k . Se dice que es una coordenda cíclica si el Lagrangiano no depende explícitamente de q_k . Por lo tanto, si es cíclica, también es quasi-cíclica.

Se cumple que si q_k es quasi-cíclica,

$$\tilde{C}_k^T \dot{q} = 0 \quad (\text{G.42})$$

donde \tilde{C}_k es la columna k -ésima de la matriz $C(q, \dot{q})$.

Demostración. Por ser q_k quasi-cíclica, entonces para todo i, j ,

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{G.43})$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que D es simétrica, se cumple la siguiente relación entre símbolos de Christoffel para todo i, j :

$$c_{j,ki} + c_{i,kj} = 0 \quad (\text{G.44})$$

El desarrollo de $\tilde{C}_k^T \dot{q}$ puede escribirse de las dos formas siguientes:

$$\tilde{C}_k^T \dot{q} = \sum_{j=1}^n C_{jk} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \dot{q}_j \dot{q}_i c_{j,ki} \quad (\text{G.45})$$

donde C_{jk} son los elementos de la columna k -ésima de C_j , y

$$\tilde{C}_k^T \dot{q} = \sum_{i=1}^n C_{ik} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_j c_{i,kj} \quad (\text{G.46})$$

donde C_{ik} son los elementos de la columna k -ésima de C_i .

Entonces, teniendo en cuenta la relación G.44 se cumple que $\tilde{C}_k^T \dot{q} = -\tilde{C}_k^T \dot{q}$, por lo que $\tilde{C}_k^T \dot{q} = 0$. □

Bibliografia

- [1] R. M. Murray, Z. Li, and S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Inc., 1994.