

# Cinemática

Félix Monasterio-Huelin

26 de septiembre de 2016

## Índice

Índice	1
Índice de Figuras	2
Índice de Tablas	2
1. Grados de libertad y cadenas cinemáticas de mecanismos de sólidos rígidos	3
2. Robot de estudio de seis grados de libertad	7
3. Cinemática Directa de posición y orientación	8
4. Definición de velocidad lineal y de velocidad angular del sólido rígido	12
5. Cinemática Directa de velocidad angular	13
6. Cinemática Directa de velocidad lineal	14
7. Obtención de los vectores de orientación de la mano, $(a, n, s)$ a partir de los ángulos $\{\alpha_a, \alpha_s\}$ y la coordenada $a_z$ o $s_z$	16
8. Desacoplo cinemático	18
9. Cinemática Inversa de Posición	19
10. Cinemática Inversa de Orientación	21
11. Condiciones cinemáticas para $q_4 = 0$ : ángulos $\{\alpha_Q, \Delta_4\}$	23
12. Jacobiano del robot: cinemática directa de velocidad	25
13. Cinemática Inversa de velocidad y aceleración	28
14. Ejemplo del Problema Cinemático Inverso de velocidad: comentarios sobre las singularidades	29
A. Operaciones vectoriales y con matrices de rotación	32
B. Función $\text{atan2}(y, x)$	34
C. Obtención de las soluciones al Problema Cinemático Inverso de Posición	34
D. Obtención de $J_{12}(q)$ y $\det(J_{12})$	36
E. Obtención de $J_{21}(q)$ y $\det(J_{21})$	38
F. Obtención de $J_{22}(q)$ y $\det(J_{22})$	39

## Índice de Figuras

1.1. Mecanismos Planos de dos grados de libertad . . . . .	3
1.2. Mecanismo plano de cero grados de libertad . . . . .	4
1.3. Mecanismo plano de un grado de libertad: péndulo simple . . . . .	4
1.4. Mecanismo plano del manipulador Talos . . . . .	6
1.5. Mecanismo tridimensional de tres grados de libertad . . . . .	6
2.1. Mecanismo de seis grados de libertad . . . . .	7
3.1. Sistemas de referencia locales . . . . .	8
3.2. Sistemas de referencia locales y par cinemático (2, 3) . . . . .	9
5.1. Sistemas de referencia locales y par cinemático (2, 3) . . . . .	13
7.1. Orientación de la mano y proyección en el plano XY . . . . .	17
8.1. Problema cinemático inverso con desacoplo cinemático . . . . .	19
9.1. Mecanismo de cuatro grados de libertad . . . . .	20
9.2. Soluciones al problema cinemático inverso de posición . . . . .	21
10.1. Configuración $R_{S_M}^I$ con $R_{S_B}^{II}$ . . . . .	22
10.2. Soluciones al problema cinemático inverso de orientación . . . . .	22
11.1. Orientación de la mano con $q_4 = 0$ . . . . .	24
11.2. Parámetros para el estudio de $q_4 = 0$ con $q_4 = -\pi/4$ . . . . .	24
14.1. Mecanismo plano de dos grados de libertad . . . . .	29
C.1. Mecanismo de cuatro grados de libertad . . . . .	34

## Índice de Tablas

# 1. Grados de libertad y cadenas cinemáticas de mecanismos de sólidos rígidos

El concepto de **grado de libertad** tiene diversas acepciones. En este escrito lo utilizaremos exclusivamente en el sentido de la movilidad de los mecanismos formados por un conjunto de sólidos rígidos unidos entre sí a través de uniones de algún tipo, es decir, formado por una **cadena cinemática** de sólidos rígidos.

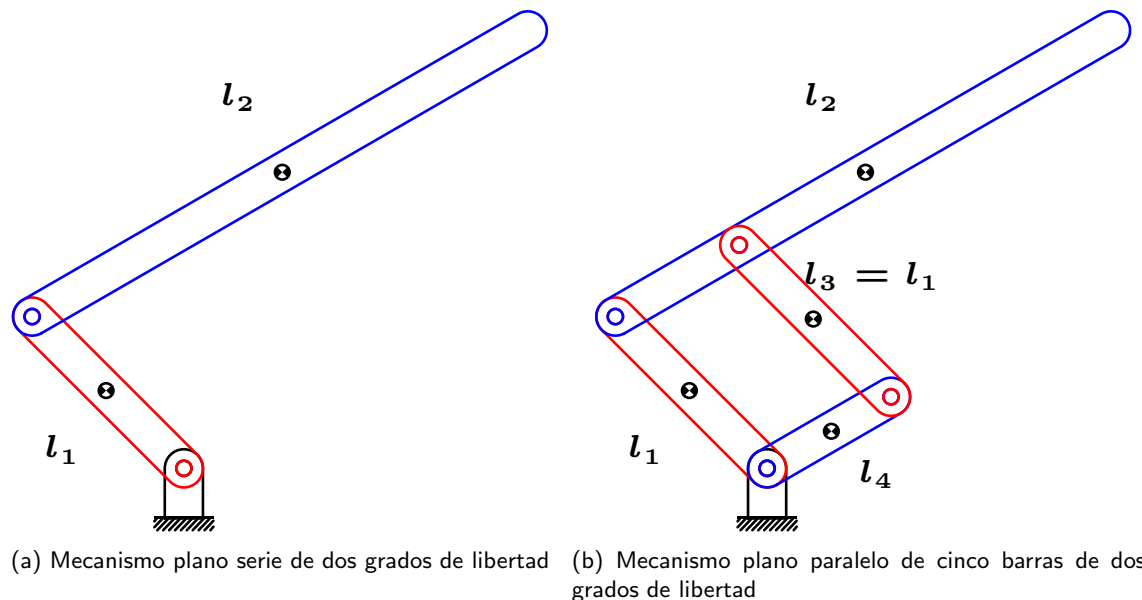


Figura 1.1: Mecanismos Planos de dos grados de libertad

En la Figura 1.1 se muestran dos mecanismos planos de dos grados de libertad. En la Figura 1.1a se trata de un mecanismo serie con una **cadena cinemática abierta**, y en la Figura 1.1b es un mecanismo paralelo (hay dos anclajes en el suelo, para las barras 1 y 4, aunque en la figura se hayan representado solapados, que se articulan con la barra 2) con una **cadena cinemática cerrada**. Los mecanismos serie siempre están formados por cadenas cinemáticas abiertas, mientras que en los mecanismos paralelos hay, al menos, una cadena cinemática cerrada. Se denominan paralelos cuando el efector final (en nuestro ejemplo la barra 2) se une a más de un mecanismo independiente: la barra 1 forma un mecanismo y las barras 3 y 4 forman otro mecanismo. Una ventaja de los mecanismos paralelos es que los motores pueden anclarse en una base común, a diferencia de los mecanismos serie, en los que los motores deben anclarse en cada articulación. Como consecuencia, los mecanismos paralelos pueden ser más ligeros que los mecanismos serie, y por lo tanto, pueden incluir motores con mayor potencia mecánica, además de que reducen la flexibilidad inherente a cualquier barra rígida.

Se denomina **par cinemático** al conjunto de dos sólidos vinculados entre sí de tal forma que se limitan mutuamente el movimiento.

Utilizaremos el término **articulación** para referirnos a cualquier forma de unión, no necesariamente cuando se trate de un par cinemático esférico, al que suele denominarse articulación. Un par cinemático se define por sus grados de libertad, por lo que es habitual hablar de los grados de libertad de la articulación asociada a dicho par cinemático. Así, una articulación rotacional es de un grado de libertad, es lo mismo que decir que un par cinemático con articulación rotacional es de un grado de libertad.

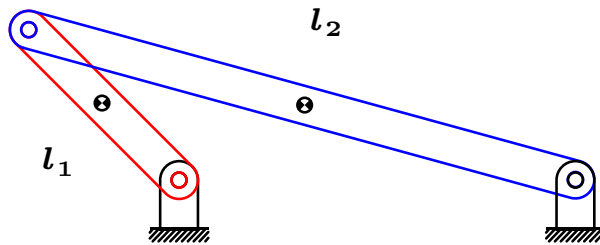


Figura 1.2: Mecanismo plano de cero grados de libertad

La **movilidad** de un mecanismo es un concepto cinemático que indica la capacidad que tiene un mecanismo para realizar movimientos infinitesimales. El **número de grados de libertad** es el número mínimo de variables cinemáticas independientes entre sí que permiten a un mecanismo realizar movimientos. Por ejemplo, el mecanismo de la Figura 1.2 consiste en una cadena cinemática cerrada plana, formada por dos barras unidas al suelo y entre sí a través de tres articulaciones rotacionales no tiene ninguna movilidad, por lo que su número de grados de libertad es cero.

El número de grados de libertad de un sólido rígido que se mueve libremente en el espacio cartesiano tridimensional es seis: tres de posición en  $\mathbb{R}^3$  y tres de orientación en  $SO(3)$  (es el espacio  $SE(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , llamado grupo de las transformaciones rígidas espaciales cuya dimensión es  $\mathcal{D} = 6$ ). Si se limitan sus movimientos de tal manera que permanezca en un plano, el número de grados de libertad se reduce a tres: dos de posición en  $\mathbb{R}^2$  y uno de orientación en  $SO(2)$  (es el espacio  $SE(2) = \mathbb{R}^2 \times SO(2)$ , llamado grupo de las transformaciones rígidas planas cuya dimensión es  $\mathcal{D} = 3$ ). Sea como sea que se limite al plano diremos que hay tres ligaduras, que pueden representarse mediante tres ecuaciones independientes que solo dependen de la posición y la orientación. El espacio de rotaciones posibles ha pasado de  $SO(3)$ , que es de dimensión tres, a  $SO(2)$ , que es de dimensión uno, y el espacio de posiciones cartesianas ha pasado de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^2$ . Si además sólo se le permite realizar rotaciones alrededor de un eje perpendicular al plano (par cinemático de tipo rotacional  $R$ ) o traslaciones siguiendo una recta contenida en el plano (par cinemático de tipo traslacional o prismático  $P$ ), el número de grados de libertad se habrá reducido a la unidad. En el primer caso porque no puede realizar traslaciones y solo puede realizar rotaciones sobre un subespacio o variedad de dimensión uno, que es la circunferencia, y en el segundo, porque no puede realizar rotaciones y solo puede realizar traslaciones sobre un subespacio o variedad de dimensión uno, que es la recta.

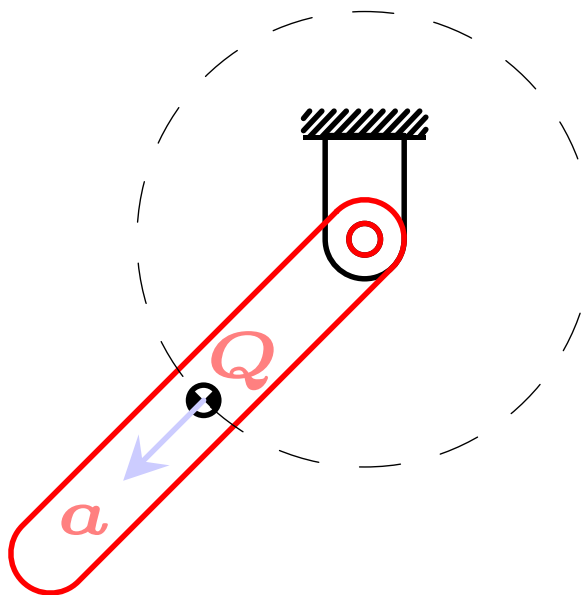


Figura 1.3: Mecanismo plano de un grado de libertad: péndulo simple

En la Figura 1.3 se muestra el primer caso, un péndulo simple, que es un mecanismo de un grado de libertad, ya que el centro de masas (punto  $Q$  en la figura) solo puede moverse en una circunferencia de radio constante y para cambiar la orientación (vector  $a$  en la figura) es necesario

cambiar la posición, por lo que hay dos ligaduras en el plano cartesiano.

En general, no es sencillo conocer cuantas ligaduras tiene un mecanismo tridimensional. No obstante, si un sistema mecánico en  $\mathbb{R}^3$  consta de un conjunto de  $N$  sólidos rígidos y  $m$  ligaduras que únicamente dependen de la posición  $r_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = 1 \dots N$  y de la orientación  $R_i \in SO(3)$  definidas a través de funciones vectoriales integrables e independientes de la forma  $g_k(r, R) = 0$ ,  $k = 1 \dots m$ , entonces el teorema de la función implícita afirma que el sistema tiene  $n = 6N - m$  grados de libertad.

$$n = 6N - m \quad (1.1)$$

Por ejemplo, un mecanismo como el de la Figura 1.1a, de dos segmentos (sin contar la barra anclada en el suelo),  $N = 2$ , y dos articulaciones rotacionales (de un único grado de libertad), tiene dos grados de libertad ya que el número de ligaduras (en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ ) de cada articulación es cinco, por lo que  $m = 10$ .

Se ha intentado realizar un cálculo del número de grados de libertad utilizando los parámetros relevantes de un mecanismo: el número de elementos, el número de articulaciones o de pares cinemáticos, y los grados de libertad de cada articulación o par cinemático. El criterio de movilidad de Grübler-Kutzbach es el más conocido, pero por desgracia no calcula correctamente el número de grados de libertad de cualquier mecanismo.

La fórmula de Grübler-Kutzbach suele escribirse en la forma,

$$n = \mathcal{D}(\mathcal{N} - 1 - j) + \sum_{i=1}^j f_i \quad (1.2)$$

donde  $\mathcal{D}$  es la dimensión del espacio en el que está inmerso el mecanismo o espacio de movimiento común del mecanismo ( $\mathcal{D} = 6$  en el espacio tridimensional, y  $\mathcal{D} = 2$  en el plano),  $\mathcal{N}$  es el número de elementos contando el anclaje en el suelo,  $j$  es el número de articulaciones y  $f_i$  es el número de grados de libertad de la articulación  $i$ -ésima.

Esta fórmula es válida para muchos mecanismos, entre ellos las cadenas cinemáticas abiertas simples ( $j = \mathcal{N} - 1$ ) y las cerradas simples ( $j = \mathcal{N}$ ). El mecanismo plano ( $\mathcal{D} = 3$ ) de cadena cinemática cerrada de la Figura 1.1b es de dos grados de libertad, ya que consta de cinco segmentos (contando la barra anclada en el suelo),  $\mathcal{N} = 5$ , y cinco articulaciones rotacionales,  $j = 5$ , de un grado de libertad,  $f_i = 1$ .

A cada grado de libertad le asociamos una variable  $q_i$ ,  $i = 1 \dots n$  que llamaremos, en lo sucesivo, **coordenada generalizada** o coordenada de articulación, definidas en el **espacio de configuración del mecanismo**, cuya dimensión es el número de grados de libertad  $n$  del mecanismo.

Un ejemplo de mecanismo plano de cadena cerrada (que no es simple) de tres grados de libertad que satisface la fórmula de Grübler-Kutzbach, es el mecanismo plano del manipulador Talos de la Figura 1.4, que puede reducirse a un sistema de 9 barras (sin contar el suelo) y 12 articulaciones rotacionales, por lo que  $\mathcal{N} = 10$ ,  $\mathcal{D} = 3$  y  $j = 12$ . En la Figura 1.4 realmente hay 11 barras (sin contar el suelo) y 15 articulaciones rotacionales, pero dos de las barras son solo necesarias por la dificultad de poner los tres motores (circunferencias roja, verde y azul) en el mismo eje perpendicular al plano de movimiento del mecanismo. Con estas barras sigue cumpliéndose la fórmula de Grübler-Kutzbach,  $\mathcal{N} = 12$ ,  $\mathcal{D} = 3$  y  $j = 15$ .

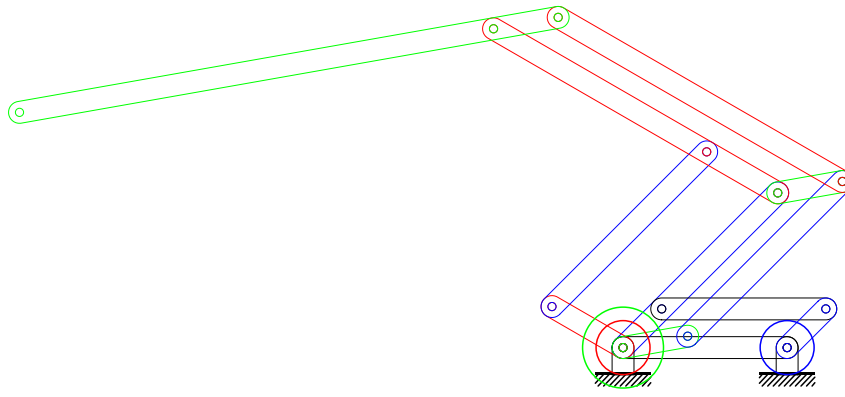


Figura 1.4: Mecanismo plano del manipulador Talos

En la Figura 1.5 se muestra un mecanismo serie tridimensional de tres grados de libertad. Para este mecanismo de cadena cinemática abierta simple se cumple la fórmula de Grübler-Kutzbach, con  $D = 6$ ,  $\mathcal{N} = 4$ ,  $j = 3$  y  $f_i = 1$  con  $i = 1, 2, 3$ .

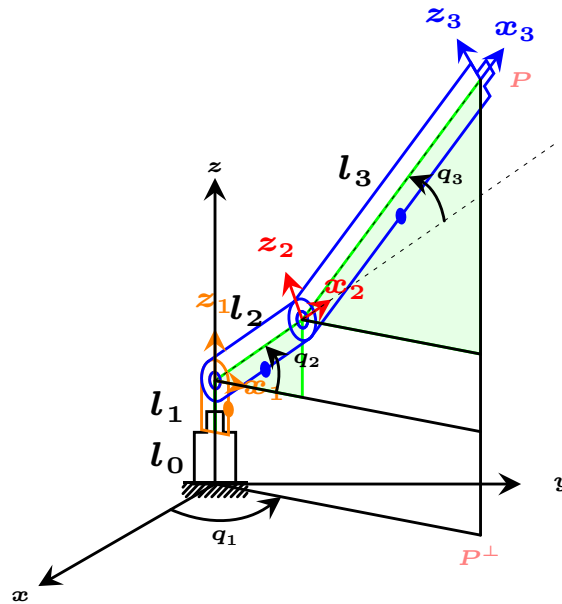


Figura 1.5: Mecanismo tridimensional de tres grados de libertad

## 2. Robot de estudio de seis grados de libertad

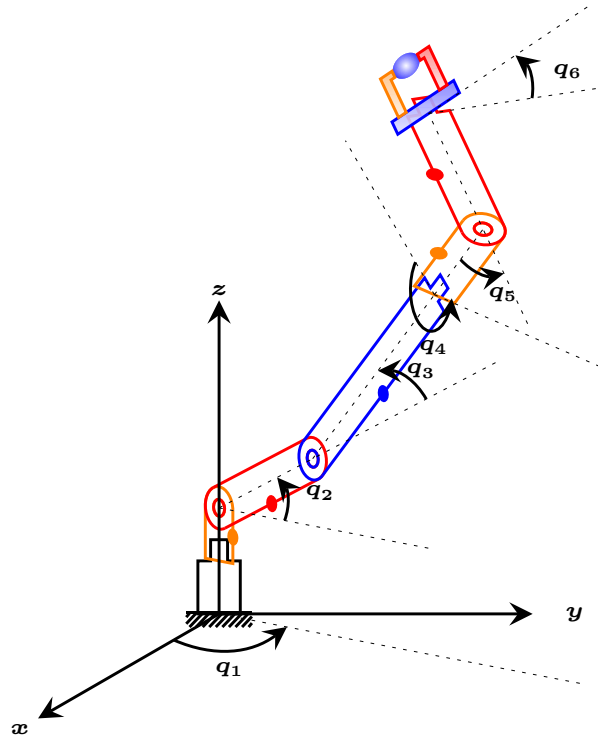


Figura 2.1: Mecanismo de seis grados de libertad

En la Figura 2.1 se muestra el robot que estudiaremos a lo largo de este documento. Consta de seis de grados de libertad  $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ . No obstante, en la Sección 11 se estudian las condiciones que deben cumplirse para restringir el movimiento del par cinemático asociado a  $q_4$ , con el objetivo de analizar un robot de cinco grados de libertad.

Las coordenadas generalizadas concretas de la Figura 2.1 son  $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{36}, \frac{\pi}{9}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$ . En la Figura 2.1 puede también apreciarse cuáles han sido los ejes de rotación de cada pieza relativos a la pieza anterior de la cadena cinemática. En la Sección 3 se definen con más rigor los sistemas de referencia fijos en cada pieza.

En general, puede elegirse cualquier conjunto de coordenadas generalizadas, siempre y cuando satisfagan la condición de ser independientes entre sí. De hecho, cualquiera de ellas, deberá ser una combinación lineal invertible de las que aquí se están definiendo. No es necesario que las coordenadas generalizadas sean ángulos relativos entre piezas contiguas. Por ejemplo, podría haberse definido  $\theta_3 = q_2 + q_3$ , y el conjunto  $\{q_1, q_2, \theta_3, q_4, q_5, q_6\}$  seguiría representando las coordenadas generalizadas del mismo robot.

En la práctica, la elección de un sistema u otro de coordenadas generalizadas depende del tipo de robot y del estudio que vaya a realizarse. Por ejemplo, si los actuadores del robot de la Figura 2.1 se hubiesen situado en cada una de las articulaciones, la elección de coordenadas generalizadas relativas a pares cinemáticos es la más conveniente desde un punto de vista del control del robot.

En lo que sigue, llamaremos brazo a las tres primeras piezas y mano a las otras tres. La estructura del brazo suele denominarse manipulador de codo (elbow manipulator), y la estructura de la mano, muñeca esférica (spherical wrist). En la Sección 8 se verá que el robot formado por estas dos estructuras simplifica la resolución del **problema cinemático inverso**. Es decir, el problema de obtener las coordenadas generalizadas a partir de la posición y orientación en el espacio cartesiano del extremo final de la mano. Siempre que no se dispongan de sensores exteroceptivos (sensores como los de visión, tacto, audición, etc.; es decir, sensores relativos al mundo exterior al robot), será necesario resolver este problema, si lo que se desea es controlar el robot para realizar la tarea de coger, transportar, soltar, empujar, etc. objetos situados en el espacio, ya que si el robot se encuentra inicialmente en una determinada configuración,  $S_{q_0}$ , deberá moverse hasta otra configuración  $S_{q_f}$ .

Para ello, deberá resolverse también el **problema de la generación de trayectorias**, así como el **problema de control**. Este último problema consiste básicamente en el diseño de controladores, para cada uno de los actuadores del robot, que permitan realizar con precisión el seguimiento de la trayectoria deseada. No obstante, si hubiese sensores exteroceptivos, el problema de control se formularía de otra forma, de la que ahora no vamos a hablar.

Al problema de obtener la posición y orientación en el espacio cartesiano del extremo final de la mano, a partir de las coordenadas generalizadas, se le denomina **problema cinemático directo**. Este problema se estudia en la Sección 3.

### 3. Cinemática Directa de posición y orientación

Cualquier punto  $P$  en el espacio cartesiano tridimensional puede ser representado mediante coordenadas referidas a cualquier sistema de referencia.

Dos sistemas de referencia pueden relacionarse entre sí mediante una rotación de sus ejes coordenados y una traslación del origen de coordenadas. En el Apéndice A se definen las matrices de rotación y se demuestran algunas propiedades de ellas que serán utilizadas en esta y sucesivas secciones.

Por lo tanto, conocidas las coordenadas de un punto cualquiera  $P$  con respecto a uno de los sistemas de referencia,  $S_1$ , es posible obtener sus coordenadas en el otro sistema,  $S_0$ , si se conoce la rotación  $R_0^1$  y traslación  $t_0^1$  entre ambos sistemas,

$$p_0 = R_0^1 p_1 + t_0^1 \quad (3.1)$$

donde  $p_0$  son las coordenadas del punto  $P$  referido a  $S_0$ ,  $p_1$  son las coordenadas del mismo punto  $P$  referido a  $S_1$  y  $t_0^1$  representa el vector de traslación expresado en coordenadas de  $S_0$ .

La transformación dada por la ecuación 3.1, se denomina **movimiento rígido**.

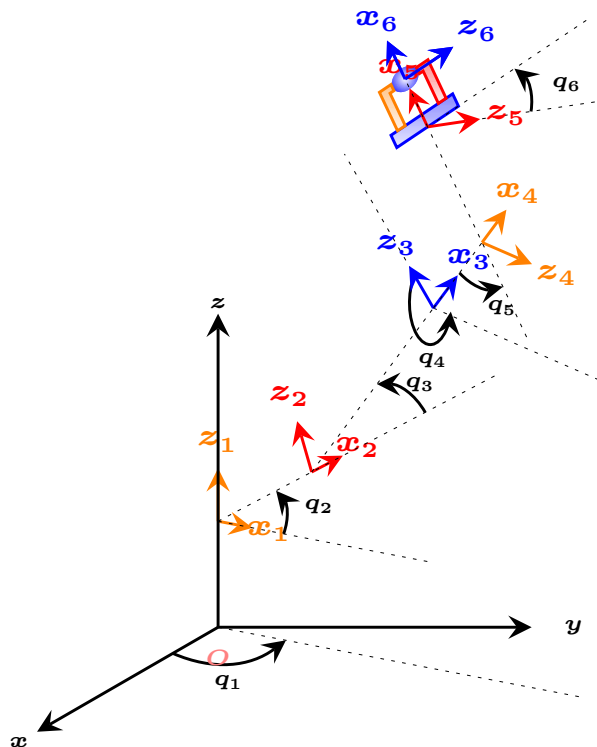


Figura 3.1: Sistemas de referencia locales

En la Figura 3.1 se representan los sistemas de referencia locales  $S_i$  de cada una de las piezas del robot presentado en la Sección 2 en la Figura 2.1. La elección de un sistema de referencia fijo en cada pieza es arbitrario, aunque hay formas de hacerlo sistemáticamente, como la representación Denavit-Hartenberg, de la que no hablaremos aquí. En cualquier caso, y debido a que las articulaciones del robot en estudio son todas rotacionales, definiremos los sistemas de referencia locales como una



rotación del sistema de referencia de su par cinemático conservando los nombres de sus ejes, pero cambiando el subíndice.

Llamaremos  $l_i$  a la distancia entre articulaciones del par cinemático  $(i - 1, i)$  y  $(i, i + 1)$ . La distancia  $l_0$  se define como la distancia entre el anclaje al suelo (punto  $O$ ) y la articulación del par cinemático  $(0, 1)$  de tal manera que el sistema de referencia  $\mathcal{S}_0$  sea un sistema de referencia inmóvil y paralelo al sistema de referencia inercial  $(x, y, z)$ . Si no se presta a confusión llamaremos también  $\mathcal{S}_0$  al sistema de referencia inercial. Por otro lado, puesto que no existe el par cinemático  $(n, n + 1)$  consideraremos que puede definirse algún punto significativo en la pieza  $n$ -ésima, que a lo largo de este documento llamaremos punto  $Q$ . Este punto  $Q$  también lo denominaremos “extremo de la mano”. La última pieza suele ser una herramienta cuando el robot es un manipulador, como por ejemplo, una pinza con dos dedos móviles. En este ejemplo, el punto  $Q$  puede ser el centro geométrico entre los puntos de agarre de los dedos. La distancia  $l_n$  será entonces, la distancia entre la articulación del par cinemático  $(n - 1, n)$  y el punto  $Q$ .

En la Figura 3.1 solo se han dibujado dos de los ejes. El tercero se obtiene mediante el producto vectorial de los otros dos,

$$y_i = z_i \times x_i \quad (3.2)$$

El conjunto de ejes de rotación de cada pieza  $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$  del robot con respecto a la pieza de su par cinemático, de la Figura 3.1, es el siguiente,

$$\mathcal{U} = \{z_0, -y_1, -y_2, x_3, y_4, x_5\} \quad (3.3)$$

donde  $z_0 = z$ .

Cuando sea necesario se utilizará el nombre del eje como su vector unitario. Por ejemplo,  $u_3 = -y_2$ .

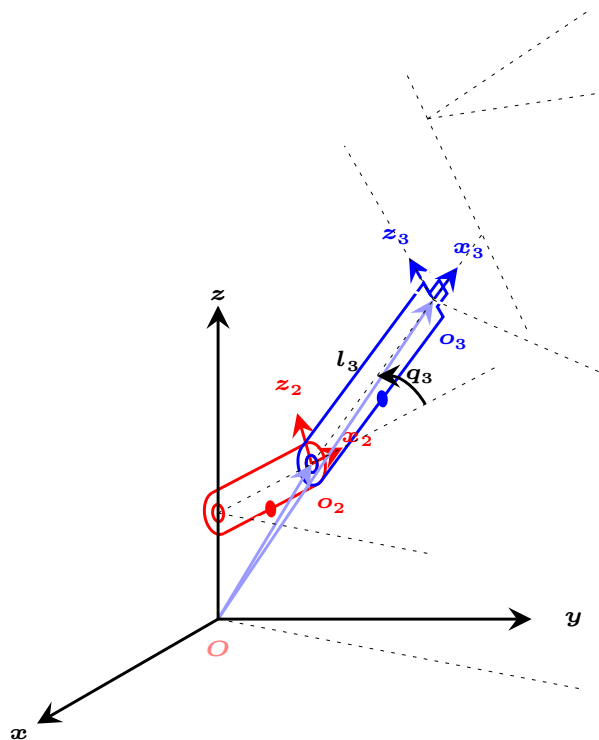


Figura 3.2: Sistemas de referencia locales y par cinemático  $(2, 3)$

El origen  $o_i$  de cada sistema de referencia local  $\mathcal{S}_i$  se sitúa en la articulación del par cinemático  $(i, i + 1)$ , con la excepción del origen  $o_n$  que se sitúa en el punto  $Q$  definido anteriormente. En la Figura 3.2 se muestra el par cinemático  $(2, 3)$  que permite definir la coordenada generalizada  $q_3$ . El eje de rotación de la pieza 3 es  $-y_2$ .

Definimos el vector  $d_{i-1}^i$  expresado en coordenadas del sistema de referencia  $\mathcal{S}_{i-1}$ , como el vector

$$d_{i-1}^i = \overrightarrow{o_{i-1}o_i} \quad (3.4)$$

De acuerdo con la notación definida anteriormente,  $l_i = |\overrightarrow{o_{i-1}o_i}|$ .

Para el robot en estudio, se define el conjunto  $\tilde{\mathcal{O}} = \{\tilde{o}_0, \tilde{o}_1, \tilde{o}_2, \tilde{o}_3, \tilde{o}_4, \tilde{o}_5, \tilde{o}_6\}$  como

$$\tilde{\mathcal{O}} = \{l_0z, l_1z_0, l_2x_1, l_3x_2, l_4x_3, l_5x_4, l_6x_5\} \quad (3.5)$$

Debido al convenio adoptado de nombres de los sistemas de referencia locales, la notación  $\tilde{o}_i$  se refiere al punto  $o_i$  expresado en coordenadas del sistema  $\mathcal{S}_{i-1}$  antes de realizar la rotación, es decir, para la configuración con  $q_i = 0$ . Con este convenio,

$$d_{i-1}^i = R_{i-1}^i \tilde{o}_i \quad (3.6)$$

Para el par cinemático de la Figura 3.2, la coordenada generalizada  $q_3$  consiste en una rotación elemental alrededor del eje  $-y_2 = \hat{j}$ , por lo que

$$R_2^3 = R_{-y, q_3} = \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & -\sin q_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_3 & 0 & \cos q_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

El vector  $d_2^3$  se encuentra en el eje  $x_3$ . Entonces, utilizando la notación definida antes para  $\tilde{o}_3$ , se cumple que

$$d_2^3 = R_2^3 \tilde{o}_3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & 0 & -\sin q_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin q_3 & 0 & \cos q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = l_3 \begin{bmatrix} \cos q_3 \\ 0 \\ \sin q_3 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

donde  $l_3 = |\overrightarrow{o_2o_3}|$ .

Se van a obtener, a continuación, varias relaciones recursivas de los vectores  $d_i^j$  que pueden ser útiles para su programación en un computador.

Teniendo en cuenta la ecuación del movimiento rígido dada por la ecuación 3.1, se cumplirán las siguientes relaciones vectoriales para un punto cualquiera  $P$  fijo en el espacio,

$$p_0 = R_0^i p_i + d_0^i \quad (3.9a)$$

$$p_0 = R_0^{i-1} p_{i-1} + d_0^{i-1} \quad (3.9b)$$

$$p_{i-1} = R_{i-1}^i p_i + d_{i-1}^i \quad (3.9c)$$

donde  $p_0$  representa al punto  $P$  en coordenadas de  $\mathcal{S}_0$ ,  $p_i$  representa al mismo punto  $P$  en coordenadas de  $\mathcal{S}_i$  y  $p_{i-1}$  representa al mismo punto  $P$  en coordenadas de  $\mathcal{S}_{i-1}$ .

Puesto que la composición de rotaciones de los sistemas de referencia locales satisfacen la regla de la cadena, es decir,

$$R_0^i = R_0^1 R_1^2 \cdots R_{i-1}^i \quad (3.10)$$

se cumplirá, sustituyendo la relación 3.9c en 3.9b y restándole la relación 3.9a, que

$$d_0^i = d_0^{i-1} + R_0^{i-1} d_{i-1}^i \quad (3.11)$$

La relación 3.10 puede expresarse en forma recursiva como

$$R_0^i = R_0^{i-1} R_{i-1}^i \quad (3.12)$$

La ecuación recursiva 3.11 representa la **ecuación fundamental de la cinemática directa de posición**, y la ecuación recursiva 3.12 representa la **ecuación fundamental de la cinemática directa de orientación**.

A partir de estas dos ecuaciones, 3.11 y 3.12, puede obtenerse de manera recursiva la posición del punto  $Q = o_n$  ( $\overrightarrow{OQ} = l_0 \mathbf{k} + \overrightarrow{o_0o_n} = l_0 \mathbf{k} + d_0^n$ ) y la orientación  $R_0^n$  del extremo final, expresados en las coordenadas del sistema  $\mathcal{S}_0$ .

Las ecuaciones 3.11 y 3.12 pueden expresarse en una forma recursiva más general relativas al sistema de referencia  $\mathcal{S}_i$ , para cualquier  $i, j$  con  $j > i$ ,

$$d_i^j = d_i^{j-1} + R_i^{j-1} d_{j-1}^j \quad (3.13a)$$

$$R_i^j = R_i^{j-1} R_{j-1}^j \quad (3.13b)$$

donde  $d_i^i = 0$  y  $R_i^i = I$ , siendo 0 el vector nulo e  $I$  la matriz identidad.

De las relaciones 3.13 deriva una ecuación recursiva que será útil más adelante, en la Sección 12,

$$d_0^n = d_0^{n-1} + R_0^{n-1} d_{n-1}^n \quad (3.14)$$

La demostración puede hacerse de la siguiente forma. Es evidente que se cumple lo siguiente

$$d_{i-1}^n = [d_{i-1}^n - d_{i-1}^{n-1}] + [d_{i-1}^{n-1} - d_{i-1}^{n-2}] + \dots + [d_{i-1}^{i+1} - d_{i-1}^i] + d_{i-1}^i \quad (3.15)$$

ya que  $d_{i-1}^{i-1} = 0$ .

Teniendo ahora en cuenta la ecuación 3.13a,

$$d_{i-1}^n = R_{i-1}^{n-1} d_{n-1}^n + R_{i-1}^{n-2} d_{n-2}^n + \dots + R_{i-1}^i d_i^{i+1} + d_{i-1}^i \quad (3.16)$$

Multiplicando por la izquierda por  $R_0^{i-1}$ ,

$$R_0^{i-1} d_{i-1}^n = R_0^{n-1} d_{n-1}^n + R_0^{n-2} d_{n-2}^n + \dots + R_0^i d_i^{i+1} + R_0^{i-1} d_{i-1}^i \quad (3.17)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la ecuación recursiva dada por la relación 3.11

$$d_0^n = d_0^{n-1} + R_0^{n-1} d_{n-1}^n = d_0^{n-2} + R_0^{n-2} d_{n-2}^n + R_0^{n-1} d_{n-1}^n = \dots \quad (3.18)$$

Continuando con la recursión quedaría demostrada la relación 3.14.

Con este mismo razonamiento puede demostrarse una expresión más general relativa al sistema de referencia  $\mathcal{S}_k$ , para cualquier  $i, j, k$  con  $j \geq i \geq k$ ,

$$d_k^j = d_k^i + R_k^i d_i^j \quad (3.19)$$

## 4. Definición de velocidad lineal y de velocidad angular del sólido rígido

Los puntos de las piezas de una cadena cinemática sufren traslaciones y rotaciones cuando el robot se mueve. Como consecuencia se producirán velocidades lineales y velocidades angulares de cualquier punto de la pieza. Si se fija un sistema de referencia  $\mathcal{S}_i$  en un punto fijo  $o_i$  de la pieza, las posiciones serán constantes respecto a ella, por lo que las velocidades lineales y angulares serán nulas.

Se denomina **velocidad lineal** de la pieza  $i$ -ésima a la variación con el tiempo de  $d_0^i$ , es decir, a

$$v_0^i(t) = \dot{d}_0^i(t) \quad (4.1)$$

La definición de velocidad angular de la pieza  $i$ -ésima es más complicada, ya que hace referencia a la variación con el tiempo de la matriz de rotación  $R_0^i$ , es decir a  $\dot{R}_0^i(t)$ .

En el Apéndice A se demuestra que

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t) \quad (4.2)$$

donde  $R$  es una matriz ortogonal y  $S$  es una matriz antisimétrica, es decir, que satisface la igualdad  $S + S^T = O$ .

Puesto que  $S$  es una matriz de orden tres antisimétrica, solo tendrá tres coeficientes distintos. Estos coeficientes representan las coordenadas del vector velocidad angular  $w(t)$  referido al sistema asociado a la matriz de rotación  $R$ .

Utilizaremos la siguiente notación general, prescindiendo por comodidad, del parámetro  $t$  del tiempo,

$$\dot{R}_i^j = S(w_i^j) R_i^j \quad (4.3)$$

donde  $w_i^j$  define la **velocidad angular** asociada a  $R_i^j$ , y

$$S(w) = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

donde  $w = (w_x, w_y, w_z)$  es un vector libre en el espacio tridimensional.

Concretamente, respecto a  $\mathcal{S}_0$

$$\dot{R}_0^i = S(w_0^i) R_0^i \quad (4.5)$$

Como  $R$  es ortogonal,  $S(t) = \dot{R}(t)R(t)^T$ . Por ejemplo, si  $R = R_{x,\theta}$  es decir, una rotación elemental alrededor del eje X de ángulo  $\theta$ , se cumple que

$$S(w^x) = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \dot{\theta} S(\mathbf{i}) \quad (4.6)$$

donde  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ , es el vector unitario del eje X.

Por lo tanto, la velocidad angular asociada a  $R = R_{x,\theta}$  es  $w^x = \dot{\theta}\mathbf{i}$ .

Puede comprobarse que esto es así para las rotaciones elementales alrededor de los eje Y y Z. Es decir,  $w^y = \dot{\theta}\mathbf{j}$  y  $w^z = \dot{\theta}\mathbf{k}$ , donde  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  y  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ .

Este resultado es muy útil para saber rápidamente cuál es la velocidad angular de una pieza en relación a su eje de rotación. Si las coordenadas generalizadas representan ángulos relativos a algún eje fijo en su par cinemático, entonces la velocidad angular será,

$$w_{i-1}^i = \dot{q}_i \mathbf{u}_i \quad (4.7)$$

donde  $\mathbf{u}_i$  representa el vector unitario del eje fijo en la pieza  $(i-1)$ -ésima alrededor del cual gira la pieza  $i$ -ésima.

## 5. Cinemática Directa de velocidad angular

Derivando con respecto al tiempo la ecuación fundamental de la cinemática directa de orientación dada por la expresión 3.12, se obtiene

$$\dot{R}_0^i = \dot{R}_0^{i-1} R_{i-1}^i + R_0^{i-1} \dot{R}_{i-1}^i \quad (5.1)$$

que puede reescribirse en la forma

$$S(w_0^i) R_0^i = S(w_0^{i-1}) R_0^{i-1} R_{i-1}^i + R_0^{i-1} S(w_{i-1}^i) R_{i-1}^i = S(w_0^{i-1}) R_0^i + R_0^{i-1} S(w_{i-1}^i) R_{i-1}^i \quad (5.2)$$

Multiplicando por la derecha, la relación 5.2, por  $(R_0^i)^T$ , y simplificando

$$S(w_0^i) = S(w_0^{i-1}) + R_0^{i-1} S(w_{i-1}^i) R_{i-1}^i (R_0^i)^T = S(w_0^{i-1}) + R_0^{i-1} S(w_{i-1}^i) (R_0^{i-1})^T \quad (5.3)$$

En el Apéndice A se demuestra que para cualquier matriz antisimétrica  $S(w)$  y cualquier matriz de rotación  $R$  se cumple la siguiente relación

$$S(Rw) = RS(w)R^T \quad (5.4)$$

Teniendo en cuenta este hecho, la relación 5.3 puede escribirse como

$$S(w_0^i) = S(w_0^{i-1}) + S(R_0^{i-1} w_{i-1}^i) = S(w_0^{i-1} + R_0^{i-1} w_{i-1}^i) \quad (5.5)$$

De aquí que,

$$w_0^i = w_0^{i-1} + R_0^{i-1} w_{i-1}^i \quad (5.6)$$

A la ecuación recursiva dada por la expresión 5.6 la llamaremos **ecuación fundamental de la cinemática directa de velocidad angular**.

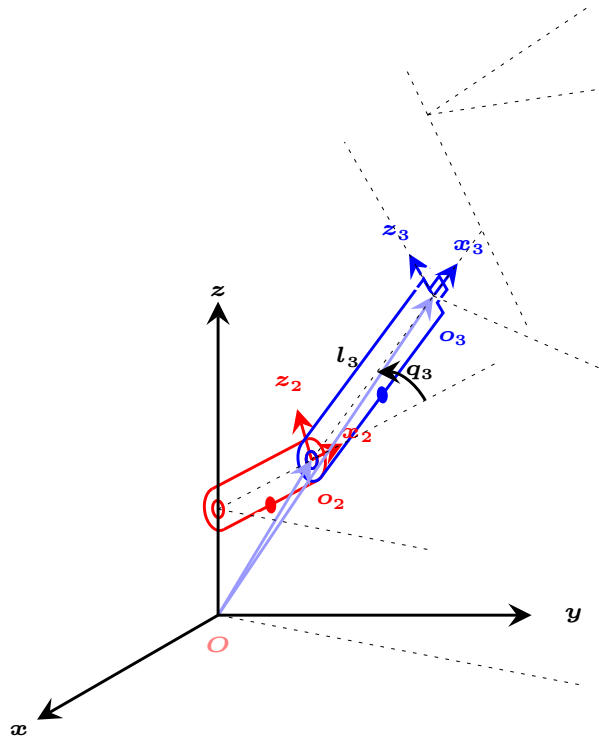


Figura 5.1: Sistemas de referencia locales y par cinemático (2,3)

Para el par cinemático (2,3) de la Figura 3.2 que reproducimos aquí en la Figura 5.1, y teniendo en cuenta la relación 4.7, se cumple que

$$w_2^3 = -\dot{q}_3 y_2 \quad (5.7)$$

donde  $\mathbf{y}_2 = (0, 1, 0)$ .

De aquí que, teniendo en cuenta ecuación fundamental de la cinemática directa de velocidad angular dada por la expresión 5.6,

$$w_0^3 = w_0^2 - \dot{q}_3 R_0^2 \mathbf{y}_2 \quad (5.8)$$

En la Sección 3 se vió que el conjunto de ejes de rotación de cada pieza  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_6\}$  del robot de la Figura 3.1 es el siguiente,

$$\mathcal{U} = \{z_0, -y_1, -y_2, x_3, y_4, x_5\} \quad (5.9)$$

donde  $z_0 = z$ .

De aquí que,

$$w_0^1 = \dot{q}_1 z_0 \quad (5.10a)$$

$$w_1^2 = -\dot{q}_2 \mathbf{y}_1 \quad (5.10b)$$

$$w_2^3 = -\dot{q}_3 \mathbf{y}_2 \quad (5.10c)$$

$$w_3^4 = \dot{q}_4 \mathbf{x}_3 \quad (5.10d)$$

$$w_4^5 = \dot{q}_5 \mathbf{y}_4 \quad (5.10e)$$

$$w_5^6 = \dot{q}_6 \mathbf{x}_5 \quad (5.10f)$$

Por otro lado, las matrices de rotación de cada eje con respecto al sistema de referencia de su par cinemático, son las siguientes matrices elementales,

$$R_0^1 = R_{z,q_1} \quad (5.11a)$$

$$R_1^2 = R_{-y,q_2} \quad (5.11b)$$

$$R_2^3 = R_{-y,q_3} \quad (5.11c)$$

$$R_3^4 = R_{x,q_4} \quad (5.11d)$$

$$R_4^5 = R_{y,q_5} \quad (5.11e)$$

$$R_5^6 = R_{x,q_6} \quad (5.11f)$$

El problema cinemático directo de velocidad angular se resuelve calculando  $w_0^6$ , por lo que podemos concluir, que la velocidad angular del extremo del robot depende tanto de las coordenadas generalizadas  $q = (q_1, q_2, \dots, q_6)^T$  como de sus variaciones con el tiempo  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_6)^T$ , es decir, de la configuración del robot y de su evolución en el tiempo. En la Sección 12 se expone una forma matricial de representar este problema a través del jacobiano de velocidad angular  $J_w$ ,

$$w_0^n = J_w(q) \dot{q} \quad (5.12)$$

donde

$$w_0^n = \begin{bmatrix} w_{0,x}^n \\ w_{0,y}^n \\ w_{0,z}^n \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

## 6. Cinemática Directa de velocidad lineal

Derivando con respecto al tiempo la ecuación fundamental de la cinemática directa de posición dada por 3.11, se obtiene

$$\dot{d}_0^i = \dot{d}_0^{i-1} + \dot{R}_0^{i-1} d_{i-1}^i + R_0^{i-1} \dot{d}_{i-1}^i \quad (6.1)$$

que puede reescribirse en la forma

$$\dot{d}_0^i = \dot{d}_0^{i-1} + S(w_0^{i-1}) R_0^{i-1} d_{i-1}^i + R_0^{i-1} \dot{d}_{i-1}^i \quad (6.2)$$

Nos centraremos ahora en la obtención de  $\dot{d}_{i-1}^i$ . En la Sección 3 se obtuvo la relación 3.6 teniendo en cuenta que todas las articulaciones son rotacionales,

$$d_{i-1}^i = R_{i-1}^i \tilde{o}_i \quad (6.3)$$

Derivando con respecto al tiempo la relación 6.3,

$$\dot{d}_{i-1}^i = \dot{R}_{i-1}^i \tilde{o}_i = S(w_{i-1}^i) R_{i-1}^i \tilde{o}_i = S(w_{i-1}^i) d_{i-1}^i \quad (6.4)$$

ya que  $\tilde{o}_i$  es un vector constante.

En el Apéndice A se demuestra que  $RS(a)b = S(Ra)Rb$ , por lo que, multiplicando por la izquierda la relación 6.4 por  $R_0^{i-1}$ , se obtiene que

$$R_0^{i-1} \dot{d}_{i-1}^i = S(R_0^{i-1} w_{i-1}^i) R_0^{i-1} d_{i-1}^i \quad (6.5)$$

De aquí que la relación 6.2 pueda ser escrita en la forma

$$\dot{d}_0^i = \dot{d}_0^{i-1} + S(w_0^i) R_0^{i-1} d_{i-1}^i \quad (6.6)$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación fundamental de la cinemática directa de velocidad angular dada por 5.6,  $w_0^i = w_0^{i-1} + R_0^{i-1} w_{i-1}^i$ .

A la ecuación recursiva dada por 6.6 la llamaremos **ecuación fundamental de la cinemática directa de velocidad lineal**.

Teniendo en cuenta la ecuación de la cinemática directa de posición dada por 3.11, se puede escribir la ecuación 6.6 como,

$$\dot{d}_0^i = \dot{d}_0^{i-1} + S(w_0^i) (d_0^i - d_0^{i-1}) \quad (6.7)$$

que, a su vez puede expresarse en forma vectorial, ya que, como se indica en el Apéndice A se cumple que  $a \times b = S(a)b$ ,

$$\dot{d}_0^i = \dot{d}_0^{i-1} + w_0^i \times (d_0^i - d_0^{i-1}) \quad (6.8)$$

La ecuación recursiva dada por 6.8 es una forma habitual de expresar la **ecuación fundamental de la cinemática directa de velocidad lineal**.

Por otro lado, puesto que  $w_{i-1}^i = \dot{q}_i \mathbf{u}_i$  y  $R_{i-1}^i = R_{\mathbf{u}_i, q_i}$ , entonces

$$\dot{d}_{i-1}^i = \dot{q}_i S(\mathbf{u}_i) R_{\mathbf{u}_i, q_i} \tilde{o}_i \quad (6.9)$$

donde  $\tilde{o}_i$  es un vector constante en la dirección que une las articulaciones.

En el Apéndice A se demuestra que  $S(Ra)Rb = RS(a)b$ , entonces se cumple que

$$\dot{d}_{i-1}^i = \dot{q}_i R_{\mathbf{u}_i, q_i} S(\mathbf{u}_i) \tilde{o}_i \quad (6.10)$$

ya que  $R_{\mathbf{u}_i, q_i} \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i$ .

La expresión de la derecha de 6.10 también puede ser escrita en forma vectorial, ya que, como se indica en el Apéndice A se cumple que  $a \times b = S(a)b$ ,

$$\dot{d}_{i-1}^i = \dot{q}_i R_{\mathbf{u}_i, q_i} (\mathbf{u}_i \times \tilde{o}_i) \quad (6.11)$$

Para el par cinemático (2, 3) del robot en estudio,  $u_3 = -y_2$ ,  $\tilde{o}_3 = l_3 x_2$  y  $R_{u_3, q_3} = R_{-y, q_3}$ . De aquí que

$$\dot{d}_2^3 = l_3 \dot{q}_3 R_{-y, q_3} z_2 = l_3 \dot{q}_3 \begin{bmatrix} -\sin q_3 \\ 0 \\ \cos q_3 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Este resultado podía haberse obtenido directamente derivando con respecto al tiempo  $\dot{d}_2^3$  de la relación 3.8,

$$d_2^3 = l_3 \begin{bmatrix} \cos q_3 \\ 0 \\ \sin q_3 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

El problema cinemático directo de velocidad lineal se resuelve calculando  $\dot{d}_0^6$ , por lo que podemos concluir, que la velocidad lineal del extremo del robot depende tanto de las coordenadas generalizadas  $q = (q_1, q_2, \dots, q_6)^T$  como de sus variaciones con el tiempo  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_6)^T$ , es decir, de la configuración del robot y de su evolución instantánea en el tiempo. En la Sección 12 se expone una forma matricial de representar este problema a través del jacobiano de velocidad lineal  $J_v$ ,

$$\dot{d}_0^n = J_v(q)\dot{q} \quad (6.14)$$

donde

$$\dot{d}_0^n = \begin{bmatrix} \dot{d}_{0,x}^n \\ \dot{d}_{0,y}^n \\ \dot{d}_{0,z}^n \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Por último se obtiene una expresión recursiva que será útil para obtener el Jacobiano de velocidad lineal.

Derivando con respecto al tiempo, la expresión recursiva obtenida en la Sección 3, dada por 3.19, haciendo  $j = n$  y  $k = i - 1$ , se obtiene lo siguiente

$$d_{i-1}^n = d_{i-1}^i + R_{i-1}^i d_i^n \quad (6.16a)$$

$$\dot{d}_{i-1}^n = \dot{d}_{i-1}^i + S(w_{i-1}^i)R_{i-1}^i d_i^n + R_{i-1}^i \dot{d}_i^n \quad (6.16b)$$

donde se ha hecho  $\dot{R}_{i-1}^i = S(w_{i-1}^i)R_{i-1}^i$ .

La expresión  $S(w_{i-1}^i)R_{i-1}^i d_i^n$  y  $\dot{d}_{i-1}^i$  pueden escribirse en la forma

$$\dot{d}_{i-1}^i = \dot{q}_i S(\mathbf{u}_i) R_{i-1}^i \bar{o}_i = \dot{q}_i S(\mathbf{u}_i) d_{i-1}^i \quad (6.17a)$$

$$S(w_{i-1}^i) R_{i-1}^i d_i^n = \dot{q}_i S(\mathbf{u}_i) R_{i-1}^i d_i^n \quad (6.17b)$$

donde se ha tenido en cuenta la expresión 6.4 y la relación 4.7 obtenida en la Sección 4.

De aquí que,

$$\dot{d}_{i-1}^n = \dot{q}_i S(\mathbf{u}_i) d_{i-1}^n + R_{i-1}^i \dot{d}_i^n \quad (6.18)$$

## 7. Obtención de los vectores de orientación de la mano, $(a, n, s)$ a partir de los ángulos $\{\alpha_a, \alpha_s\}$ y la coordenada $a_z$ o $s_z$

Es habitual definir la orientación de la mano mediante tres vectores ortonormales  $\{a, n, s\}$ , que llamaremos **avance**, **normal** y **deslizamiento** respectivamente. Utilizaremos los símbolos  $a$ ,  $n$  y  $s$  por sus siglas en inglés, approach, normal y sliding respectivamente, donde

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (7.1a)$$

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad (7.1b)$$

$$s = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} \quad (7.1c)$$



En la Figura 7.1 se muestra la orientación de la mano en el espacio que adoptaremos en este escrito.

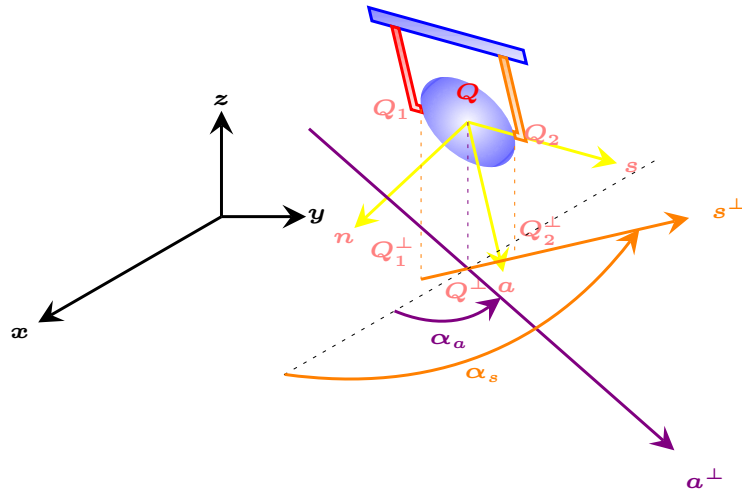


Figura 7.1: Orientación de la mano y proyección en el plano XY

La matriz de orientación  $R_{S_O}$  referida al sistema inercial, puede representarse de diversas formas, dependiendo de cómo se haya definido el eje de avance fijo en la mano.

Si el eje de avance es el eje X, la matriz  $R_{S_O}$  será 7.2a, y si el eje de avance es el eje Z, será 7.2b,

$$R_{S_O} = \begin{bmatrix} a_x & -n_x & -s_x \\ a_y & -n_y & -s_y \\ a_z & -n_z & -s_z \end{bmatrix} \quad (7.2a)$$

$$R_{S_O} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} \quad (7.2b)$$

En ambos casos se cumplen las relaciones,

$$n = s \times a \quad (7.3a)$$

$$s = a \times n \quad (7.3b)$$

$$a = n \times s \quad (7.3c)$$

$$a \cdot n = a \cdot s = n \cdot s = 0 \quad (7.3d)$$

donde  $\times$  representa el producto vectorial y  $\cdot$  el producto escalar.

La proyección de los vectores de avance y deslizamiento sobre el plano XY no son, en general, ortogonales, como se aprecia en la Figura 7.1.

Definimos los ángulos  $\alpha_a$  y  $\alpha_s$  de la siguiente forma,

$$a_x = |a^\perp| \cos \alpha_a \quad (7.4a)$$

$$a_y = |a^\perp| \sin \alpha_a \quad (7.4b)$$

$$s_x = |s^\perp| \cos \alpha_s \quad (7.4c)$$

$$s_y = |s^\perp| \sin \alpha_s \quad (7.4d)$$

donde  $|a^\perp|$  y  $|s^\perp|$  representan los módulos de las proyecciones sobre el plano XY de los vectores de avance y deslizamiento respectivamente.

Dado el vector de avance  $a$ , se deberá cumplir que  $a \cdot s = 0$ , por lo que, dado el ángulo  $\alpha_s$  puede obtenerse la coordenada  $s_z$  de la siguiente forma,

$$s_z = -\frac{a_x}{a_z}s_x - \frac{a_y}{a_z}s_y \quad (7.5)$$

con  $a_z \neq 0$ .

Si  $a_z = 0$ , entonces  $s_z$  puede tomar cualquier valor, como por ejemplo  $s_z = 0$ .

Dado el vector de deslizamiento  $s$  se obtendría el vector de avance  $a$  de forma similar.

Puesto que los vectores  $a$  y  $s$  son normales, resulta más sencillo definir, para un valor cualquiera de  $a'_z \neq 0$  o  $s'_z \neq 0$ , los vectores directores de  $a^\perp$  y  $s^\perp$ ,  $(a'_x, a'_y)$  y  $(s'_x, s'_y)$ ,

$$a'_x = \cos \alpha_a \quad (7.6a)$$

$$a'_y = \sin \alpha_a \quad (7.6b)$$

$$s'_x = \cos \alpha_s \quad (7.6c)$$

$$s'_y = \sin \alpha_s \quad (7.6d)$$

$$a'_z = -\frac{s'_x}{s'_z}a'_x - \frac{s'_y}{s'_z}a'_y \quad (7.6e)$$

$$s'_z = -\frac{a'_x}{a'_z}s'_x - \frac{a'_y}{a'_z}s'_y \quad (7.6f)$$

Posteriormente se normalizarían los vectores  $a' = (a'_x, a'_y, a'_z)$  y  $s' = (s'_x, s'_y, s'_z)$  para obtener los vectores  $a$  y  $s$ .

Los modulos de los vectores proyectados  $a^\perp$  y  $s^\perp$ , serán

$$|a^\perp| = \frac{1}{\sqrt{1 + (a'_z)^2}} \quad (7.7a)$$

$$|s^\perp| = \frac{1}{\sqrt{1 + (s'_z)^2}} \quad (7.7b)$$

El vector normal  $n$  se obtendría a partir del producto vectorial de los vectores deslizamiento y avance,  $n = s \times a$ .

Un caso particular, que no está contemplado en las anteriores ecuaciones, es cuando la mano se encuentra perpendicular al plano XY. En este caso, es suficiente hacer

$$a'_x = 0 \quad (7.8a)$$

$$a'_y = 0 \quad (7.8b)$$

y calcular  $s$  y  $n$  como se ha hecho anteriormente.

## 8. Desacoplo cinemático

Cualquier mecanismo de seis grados de libertad cuyas tres últimas articulaciones intersequen en un punto, permiten el desacoplo cinemático de posición y orientación. Es decir, es posible resolver los problemas cinemáticos inversos de posición y orientación independientemente. O más concretamente, es posible obtener las coordenadas generalizadas de las tres primeras articulaciones resolviendo un problema cinemático inverso de posición y de las tres últimas resolviendo un problema cinemático inverso de orientación.

Al punto de intersección de las tres últimas articulaciones se le denomina **centro de la muñeca**.

El tipo de mecanismo que estamos estudiando satisface esta condición, ya que tiene una muñeca esférica, por lo que el movimiento de las tres últimas articulaciones alrededor de sus ejes de rotación, no cambia el centro de la muñeca.

En la Figura 8.1 se muestra este mecanismo en una configuración concreta, donde  $Q$  y  $\{a, n, s\}$  representan, respectivamente, el punto y la orientación deseadas del extremo de la mano.

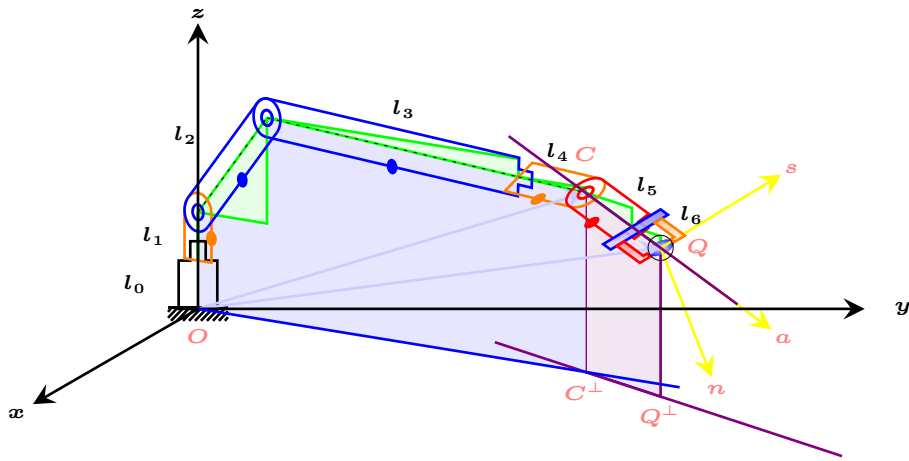


Figura 8.1: Problema cinemático inverso con desacoplo cinemático

El procedimiento que debe seguirse es el siguiente:

1. Obtener el centro de la muñeca  $C$ , conocido el vector de avance  $\mathbf{a}$ , el punto deseado del extremo de la mano  $Q$ , y la dimensión de la mano  $d_M = l_5 + l_6$ :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ} - d_M \mathbf{a} \quad (8.1)$$

2. Resolver el problema cinemático inverso de la posición  $C$  para obtener  $\{q_1, q_2, q_3\}$ . Se estudia en la Sección 9
3. Calcular la matriz de rotación  $R_0^3 = R_0^1 R_1^2 R_2^3$  que llamaremos  $R_{S_B}$ .
4. Calcular  $R_{S_M}$  conocida la matriz de orientación deseada  $R_{S_0}$  del mecanismo y  $R_{S_B}$ ,

$$R_{S_M} = R_{S_B}^T R_{S_0} \quad (8.2)$$

5. Resolver el problema cinemático inverso de la orientación  $R_3^6$  para obtener  $\{q_4, q_5, q_6\}$ . Se estudia en la Sección 10.

## 9. Cinemática Inversa de Posición

En esta Sección consideramos un mecanismo como el de la Figura 9.1 donde  $C$  es el centro de la muñeca.

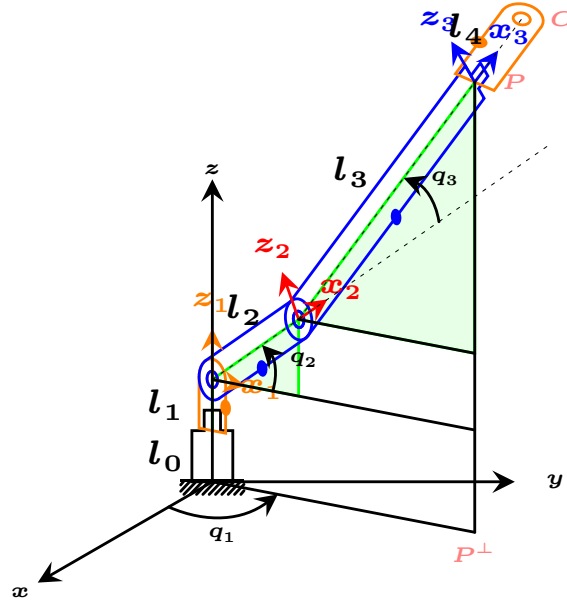


Figura 9.1: Mecanismo de cuatro grados de libertad

El problema cinemático inverso de posición consiste en obtener las coordenadas generalizadas a partir de las coordenadas de un punto  $Q$  fijo en el extremo de la mano,

$$Q = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

En el caso en que pueda desacoplarse el brazo y la mano, el eje de avance se corta en un punto  $C$  (centro de la muñeca) de coordenadas

$$C = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

El centro de la muñeca,  $C$ , puede ser conocido si se conocen las dimensiones de los eslabones de la mano  $l_5$  y  $l_6$  y el vector de avance  $a$ ,

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ} - (l_5 + l_6) \mathbf{a} \quad (9.3)$$

siendo  $O$  el origen de coordenadas del sistema de referencia  $S_O$ .

El vector de avance puede obtenerse a partir de la matriz de rotación del sistema fijo en el extremo de la mano  $R_{S_O}$ . Por ejemplo si se ha definido esta matriz como en la relación 7.2a, entonces

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x & -n_x & -s_x \\ a_y & -n_y & -s_y \\ a_z & -n_z & -s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Una forma compacta de escribir las coordenadas de  $C$  es la siguiente

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ} - (l_5 + l_6) R_{S_O} \mathbf{i} \quad (9.5)$$

donde

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

Si se hubiese escogido la relación 7.2b, es decir, que el eje de avance representase el eje  $Z$ ,

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ} - (l_5 + l_6) R_{S_O} \mathbf{k} \quad (9.7)$$

donde

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

El problema cinemático inverso de posición consiste, ahora, en obtener las coordenadas generalizadas del brazo  $\{q_1, q_2, q_3\}$  a partir de las coordenadas del punto  $C$ .

En la Figura 9.2 se muestran las dos soluciones posibles.

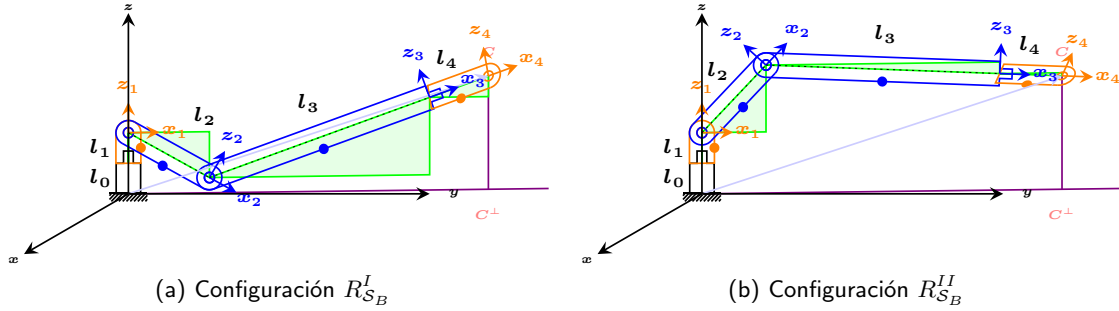


Figura 9.2: Soluciones al problema cinemático inverso de posición

En el Apéndice C se obtienen las siguientes soluciones  $\{q_1, q_2, q_3\}$  cuando los ejes de rotación del brazo son  $\{z_0, -y_1, -y_2\}$ ,

$$q_1 = \begin{cases} \text{atan2}(C_y, C_x) & C_x \neq 0 \vee C_y \neq 0 \\ \mathbb{R} & C_x = C_y = 0 \end{cases} \quad (9.9a)$$

$$q_2 = -\beta + \text{atan2}\left(L, \pm\sqrt{(1-L^2)}\right) \quad (9.9b)$$

$$q_3 = -q_2 + \text{atan2}(C_{z'} - l_2 \sin q_2, C_{x'} - l_2 \cos q_2) \quad (9.9c)$$

donde

$$\beta = \text{atan2}(C_{z'}, C_{x'}) \quad (9.10a)$$

$$L = \frac{l_2^2 + C_{x'}^2 + C_{z'}^2 - (l_3 + l_4)^2}{2l_2\sqrt{(C_{x'}^2 + C_{z'}^2)}} \quad (9.10b)$$

$$C_{x'} = C_x \cos q_1 + C_y \sin q_1 \quad (9.10c)$$

$$C_{z'} = C_z - (l_0 + l_1) \quad (9.10d)$$

## 10. Cinemática Inversa de Orientación

El problema cinemático inverso de orientación consiste en obtener las coordenadas generalizadas a partir de la matriz de rotación de un sistema de referencia fijo en el extremo de la mano,  $S_O$ ,

$$R_{S_O} = R_0^3 R_3^6 \quad (10.1)$$

En el caso en que pueda desacoplarse el brazo y la mano,  $R_{S_B} = R_0^3$  será conocido resolviendo previamente el problema cinemático de posición. Como consecuencia se conoce  $R_{S_M}$  resolviendo la ecuación siguiente,

$$R_{S_M} = R_{S_B}^T R_{S_O} \quad (10.2)$$

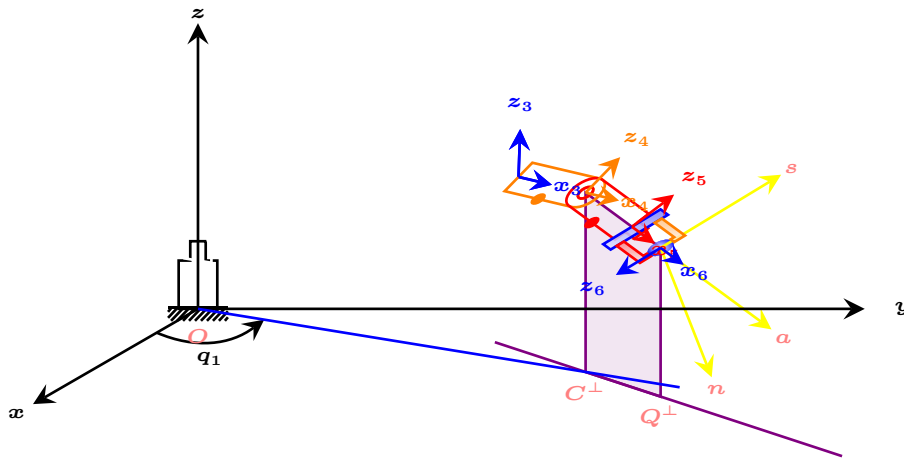
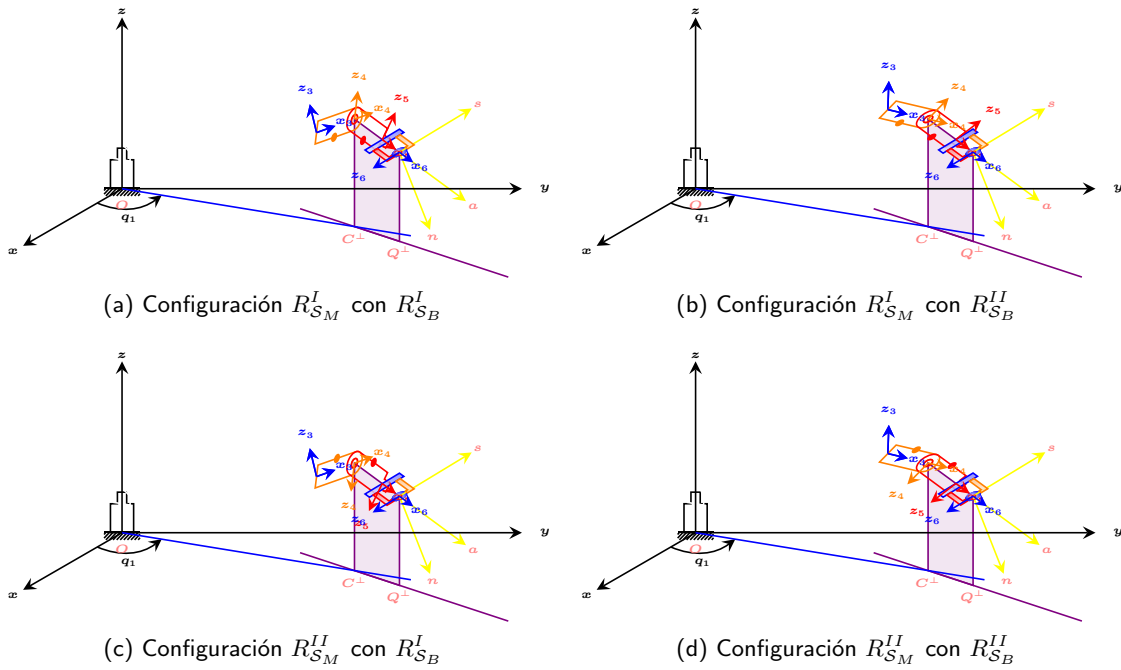


Figura 10.1: Configuración  $R_{SM}^I$  con  $R_{SB}^{II}$

En la Figura 10.1 se muestra una de las posibles soluciones del problema cinemático inverso de orientación para la solución  $R_{SB}^{II}$  del problema cinemático inverso de posición obtenida en la Sección 9.



(a) Configuración  $R_{SM}^I$  con  $R_{SB}^I$

(b) Configuración  $R_{SM}^I$  con  $R_{SB}^{II}$

(c) Configuración  $R_{SM}^{II}$  con  $R_{SB}^I$

(d) Configuración  $R_{SM}^{II}$  con  $R_{SB}^{II}$

Figura 10.2: Soluciones al problema cinemático inverso de orientación

En la Figura 10.2 se muestran las dos soluciones posibles del problema cinemático inverso de orientación para cada una de las soluciones del problema cinemático inverso de posición obtenidas en la Sección 9.

La matriz de rotación  $R_3^6$  se obtiene mediante la composición de tres rotaciones sucesivas, por lo que tiene tres incógnitas que representan las coordenadas generalizadas  $\{q_4, q_5, q_6\}$  de la mano. Es decir,

$$R_3^6 = R_3^4 R_4^5 R_5^6 \quad (10.3)$$

Las coordenadas generalizadas  $\{q_4, q_5, q_6\}$  que estamos eligiendo representan los ángulos de rotación relativos a un eje del eslabón anterior. Supongamos que sus ejes de rotación sean  $\{x_3, y_4, x_5\}$ .

Como consecuencia

$$R_3^4 = R_{X,q_4} \quad (10.4a)$$

$$R_4^5 = R_{Y,q_5} \quad (10.4b)$$

$$R_5^6 = R_{X,q_6} \quad (10.4c)$$

donde  $R_{X,q_4}$ ,  $R_{Y,q_5}$  y  $R_{X,q_6}$  representan las matrices de rotación elementales alrededor de los ejes X, Y y X respectivamente.

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 \\ 0 & \sin q_4 & \cos q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \sin q_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_5 & 0 & \cos q_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_6 & -\sin q_6 \\ 0 & \sin q_6 & \cos q_6 \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

La expresión desarrollada de 10.5 será,

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} c_5 & s_5 s_6 & s_5 c_6 \\ s_4 s_5 & c_4 c_6 - s_4 c_5 s_6 & -c_4 s_6 - s_4 c_5 c_6 \\ -c_4 s_5 & s_4 c_6 + c_4 c_5 s_6 & -s_4 s_6 + c_4 c_5 c_6 \end{bmatrix} = U \quad (10.6)$$

Cuando  $s_5 = 0$  la matriz  $R_3^6$  queda en alguna de las dos formas siguientes,

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 s_6 - s_4 c_6 \\ 0 & s_4 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 s_6 + c_4 c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_4 + q_6) & -\sin(q_4 + q_6) \\ 0 & \sin(q_4 + q_6) & \cos(q_4 + q_6) \end{bmatrix} \quad (10.7a)$$

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 c_6 + s_4 s_6 & -c_4 s_6 + s_4 c_6 \\ 0 & s_4 c_6 - c_4 s_6 & -s_4 s_6 - c_4 c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_4 - q_6) & \sin(q_4 - q_6) \\ 0 & \sin(q_4 - q_6) & -\cos(q_4 - q_6) \end{bmatrix} \quad (10.7b)$$

El problema cinemático inverso de orientación consiste, ahora, en resolver las nueve ecuaciones no lineales que se derivan de identificar las matrices

$$R_3^6 = R_{S_M} \quad (10.8)$$

Pero, puesto que son matrices de rotación, solo será necesario resolver tres ecuaciones independientes que pueden escogerse de esta identificación.

La soluciones pueden ser escritas de la siguiente forma,

$$q_5 = \text{atan2} \left( \pm \sqrt{1 - u_{11}^2}, u_{11} \right) \quad (10.9a)$$

$$q_4 = \begin{cases} \text{atan2}(u_{21}, -u_{31}) & , \sin q_5 > 0 \\ \text{atan2}(-u_{21}, u_{31}) & , \sin q_5 < 0 \\ -u_{11} q_6 + \text{atan2}(u_{32}, u_{22}) & , |u_{11}| = 1 \end{cases} \quad (10.9b)$$

$$q_6 = \begin{cases} \text{atan2}(u_{12}, u_{13}) & , \sin q_5 > 0 \\ \text{atan2}(-u_{12}, -u_{13}) & , \sin q_5 < 0 \\ u_{11} (-q_4 + \text{atan2}(u_{32}, u_{22})) & , |u_{11}| = 1 \end{cases} \quad (10.9c)$$

Podemos observar que hay dos soluciones posibles cuando  $|u_{11}| \neq 1$ , e infinitas soluciones en caso contrario, ya que, en este caso, existe una dependencia entre  $q_4$  y  $q_6$ .

## 11. Condiciones cinemáticas para $q_4 = 0$ : ángulos $\{\alpha_Q, \Delta_4\}$

En esta Sección estudiaremos las condiciones que deben cumplirse para que  $q_4 = 0$  admitiendo que pueda desacoplarse el brazo y la mano.

Imponer  $q_4 = 0$  es equivalente a imponer que el vector de avance pertenezca al plano de movimiento del brazo. Por lo tanto  $Q^\perp$  deberá pertenecer a la recta que pasa por el origen y por  $C^\perp$ .

Además, esta recta tendrá como vector director la proyección  $a^\perp$  del vector de avance  $a$  sobre el plano XY.

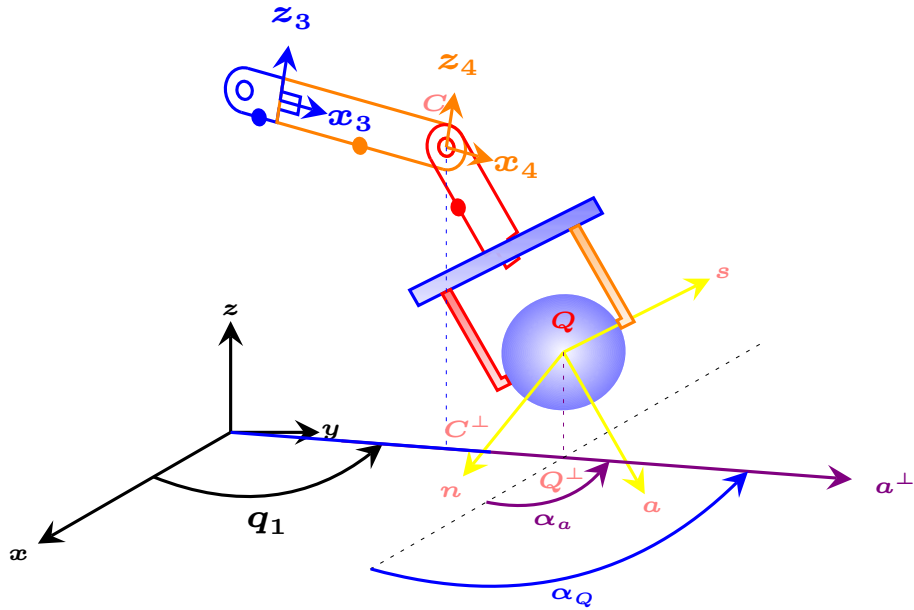


Figura 11.1: Orientación de la mano con  $q_4 = 0$

En la Figura 11.1 se muestra una situación en la que  $q_4 = 0$ .

Consideremos el caso general en que  $q_4 \neq 0$ , y definamos un desfase  $\Delta_4$  de tal manera que  $\Delta_4 = 0$  si y solamente si  $q_4 = 0$ .

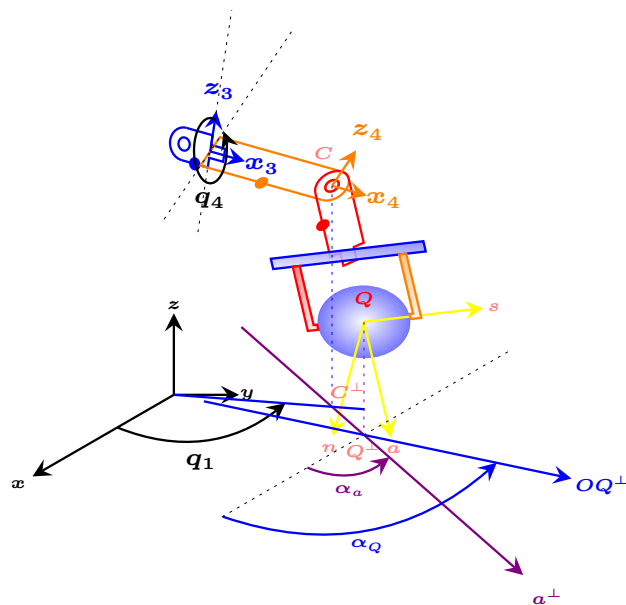


Figura 11.2: Parámetros para el estudio de  $q_4 = 0$  con  $q_4 = -\pi/4$

En la Figura 11.2 se muestra una situación en la que  $q_4 \neq 0$  con los parámetros que se definen a continuación.

Siempre se cumple que la recta que pasa por  $C^\perp = (C_x, C_y, 0)$  y  $Q^\perp = (Q_x, Q_y, 0)$  tiene como vector director  $a^\perp = (a_x, a_y, 0)$ .

Llamemos  $\alpha_Q$  al ángulo que forma la recta que pasa por el origen y  $Q^\perp$ , y  $\alpha_a$  al ángulo que forma el vector  $a^\perp$  con respecto al eje X. Definimos

$$\Delta_4 = \alpha_Q - \alpha_a \tag{11.1}$$



ya que satisface la condición de que  $\Delta_4 = 0$  si y solamente si  $q_4 = 0$ . También se cumplirá que  $\Delta_4 = 0$  si y solamente si  $q_1 = \alpha_Q$ .

De acuerdo con estas definiciones, se deberá cumplir que

$$a_x = |a^\perp| \cos \alpha_a = |a^\perp| \cos(\alpha_Q - \Delta_4) \quad (11.2a)$$

$$a_y = |a^\perp| \sin \alpha_a = |a^\perp| \sin(\alpha_Q - \Delta_4) \quad (11.2b)$$

siendo

$$Q_x = |Q^\perp| \cos \alpha_Q \quad (11.3a)$$

$$Q_y = |Q^\perp| \sin \alpha_Q \quad (11.3b)$$

En consecuencia, dado un punto cualquiera  $Q$ , un valor cualquiera  $a_z$  y obteniendo  $a_x$  y  $a_y$  mediante las relaciones 11.2 con  $\Delta_4 = 0$ , se garantiza que  $q_4 = 0$ . Cualquier valor  $\Delta_4 \neq 0$  hará que  $q_4 \neq 0$ .

La expresión de  $R_3^6$  dada por la matriz 10.6 cuando  $q_4 = 0$  adopta la forma,

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} c_5 & s_5 s_6 & s_5 c_6 \\ 0 & c_6 & -s_6 \\ -s_5 & c_5 s_6 & c_5 c_6 \end{bmatrix} = U \quad (11.4)$$

Podemos apreciar que es inmediato obtener las coordenadas generalizadas  $\{q_5, q_6\}$ ,

$$q_5 = \text{atan2}(-u_{31}, u_{11}) \quad (11.5a)$$

$$q_6 = \text{atan2}(-u_{23}, u_{22}) \quad (11.5b)$$

A diferencia del caso general con  $q_4 \neq 0$ , ahora hay una única solución al problema cinemático inverso de orientación. Además el vector de avance  $a$  estará limitado al plano definido por  $q_1$ .

## 12. Jacobiano del robot: cinemática directa de velocidad

En esta Sección se obtiene el Jacobiano del robot en estudio. El Jacobiano es una matriz que representa la derivada de una función multivariable, y por lo tanto una generalización de la derivada ordinaria de una función de una sola variable.

Se ha visto que tanto la posición  $d_0^n$  como la orientación  $R_0^n$  del extremo final del robot, expresadas en coordenadas cartesianas, son funciones que dependen del vector de coordenadas generalizadas  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ , es decir, son funciones vectoriales. Cuando se derivan con respecto al tiempo se obtienen expresiones que dependen de  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$  y de  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)^T$ .

Se ha visto en las Secciones 6 y 5 que derivando la posición y la orientación se obtienen variables de velocidad lineal y angular, respectivamente.

Nuestro objetivo en esta Sección es obtener la matriz Jacobiana del robot, a partir de las matrices Jacobianas de velocidad lineal  $J_v(q)$  y de velocidad angular  $J_w(q)$ , amabas de dimensión  $[3 \times 6]$ . Es decir, nuestro objetivo es obtener expresiones de la forma,

$$\dot{d}_0^n(t) = J_v(q(t))\dot{q}(t) \quad (12.1a)$$

$$w_0^n(t) = J_w(q(t))\dot{q}(t) \quad (12.1b)$$

La matriz Jacobiana del robot  $J(q)$ , o simplemente, el **Jacobiano del robot**, se define como la matriz de dimensión  $[6 \times n]$ , siguiente:

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_w(q) \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

Escribiremos, en lo sucesivo,  $\dot{X}(t)$  como el vector de dimensión  $[6 \times 1]$ ,

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{d}_0^n(t) \\ w_0^n(t) \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

Con esta notación se obtiene la **ecuación fundamental de la cinemática directa de velocidad**,

$$\dot{X}(t) = J(q(t))\dot{q}(t) \quad (12.4)$$

Las ecuaciones recursivas obtenidas en las Secciones 6 y 5 resultan útiles para su programación en un ordenador, pero son incómodas de manejar para realizar análisis, diseño de controladores, y otras funciones necesarias sobre el robot. Como consecuencia deben resolverse.

La ecuación recursiva de velocidad angular obtenida en la Sección 5 y dada por la expresión 5.6,

$$w_0^n = w_0^{n-1} + R_0^{n-1}w_{n-1}^n \quad (12.5)$$

es sencilla de resolver, ya que se cumple que  $w_0^0 = 0$  y  $R_0^0 = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad.

Su solución es

$$w_0^n = R_0^{n-1}w_{n-1}^n + R_0^{n-2}w_{n-2}^n + \dots + R_0^1w_1^n + w_0^n \quad (12.6)$$

Las matrices  $R_0^i$  solo dependen de las coordenadas generalizadas  $q$ , mientras que  $w_{i-1}^i$  depende  $\dot{q}$ . Se ha visto en la Sección 4, expresión 4.7, que cuando las articulaciones son rotacionales,  $w_{i-1}^i$  puede ser expresado de la siguiente forma,

$$w_{i-1}^i = \dot{q}_i \mathbf{u}_i \quad (12.7)$$

donde  $\mathbf{u}_i$  es un vector unitario constante, que representa al eje de rotación de la articulación  $i$ -ésima relativa a la articulación  $(i-1)$ -ésima.

Como consecuencia, puede reescribirse la ecuación 12.6 en la forma,

$$w_0^n = R_0^{n-1}\mathbf{u}_n\dot{q}_n + R_0^{n-2}\mathbf{u}_{n-1}\dot{q}_{n-1} + \dots + R_0^1\mathbf{u}_2\dot{q}_2 + \mathbf{u}_1\dot{q}_1 \quad (12.8)$$

La ecuación 12.8 puede expresarse en forma matricial,

$$w_0^n = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & R_0^1\mathbf{u}_2 & \dots & R_0^{n-2}\mathbf{u}_{n-1} & R_0^{n-1}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

de donde se deduce el **Jacobiano de velocidad angular**,

$$J_w(q) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & R_0^1\mathbf{u}_2 & \dots & R_0^{n-2}\mathbf{u}_{n-1} & R_0^{n-1}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

La obtención del Jacobiano de velocidad lineal  $J_v(q)$  también es sencilla si se tiene en cuenta que, en una cadena cinemática abierta, el movimiento de la articulación  $j$ -ésima no depende de las coordenadas generalizadas  $q_i$  con  $i > j$ , es decir, tan solo depende del movimiento de la parte inferior del robot incluida ella misma.

Para su obtención tendremos en cuenta la regla de la cadena de la derivada de una función vectorial, y la expresión recursiva de  $d_0^n$  obtenida en la Sección 3, dada por 3.14,

$$\dot{d}_0^n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (12.11a)$$

$$d_0^n = d_0^{i-1} + R_0^{i-1}d_{i-1}^n \quad (12.11b)$$

donde  $d_0^0 = 0$  y  $R_0^0 = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad.

Teniendo en cuenta lo que se acaba de comentar sobre las cadenas cinemáticas abiertas, se deberá cumplir, derivando la relación 12.11b, que

$$\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = R_0^{i-1} \frac{\partial d_{i-1}^n}{\partial q_i} \quad (12.12)$$

ya que, tanto  $d_0^{i-1}$  como  $R_0^{i-1}$  no dependen de  $q_i$ .

En la Sección 6 se obtuvo la ecuación recursiva 6.18 siguiente:

$$\dot{d}_{i-1}^n = \dot{q}_i S(\mathbf{u}_i) d_{i-1}^m + R_{i-1}^i \dot{d}_i^n \quad (12.13)$$

Desarrollando esta ecuación, y teniendo en cuenta que  $R_{i-1}^j R_j^{j+1} = R_{i-1}^{j+1}$ ,

$$\dot{d}_{i-1}^n = \dot{q}_i S(\mathbf{u}_i) d_{i-1}^m + \dot{q}_{i+1} R_{i-1}^i S(\mathbf{u}_{i+1}) d_i^m + R_{i-1}^{i+1} \dot{d}_{i+1}^n \quad (12.14)$$

$$= \dot{q}_i S(\mathbf{u}_i) d_{i-1}^m + \dot{q}_{i+1} R_{i-1}^i S(\mathbf{u}_{i+1}) d_i^m + \cdots + \dot{q}_{n-1} R_{i-1}^{n-2} S(\mathbf{u}_{n-1}) d_{n-2}^m + \dot{q}_n R_{i-1}^{n-1} S(\mathbf{u}_n) d_{n-1}^m \quad (12.15)$$

ya que  $\dot{d}_n^n = 0$ .

De aquí que, teniendo en cuenta la regla de la cadena de la derivada de la función vectorial  $d_{i-1}^m$ ,

$$\dot{d}_{i-1}^m = \sum_{j=1}^n \frac{\partial d_{i-1}^m}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (12.16)$$

se deberá cumplir que

$$\frac{\partial d_{i-1}^m}{\partial q_i} = S(\mathbf{u}_i) d_{i-1}^m \quad (12.17)$$

Sustituyendo la expresión 12.17 en 12.12,

$$\frac{\partial d_0^m}{\partial q_i} = R_0^{i-1} S(\mathbf{u}_i) d_{i-1}^m \quad (12.18)$$

De aquí que el **Jacobiano de velocidad lineal** quede en la forma,

$$J_v(q) = [S(\mathbf{u}_1) d_0^m \quad R_0^1 S(\mathbf{u}_2) d_1^m \quad \cdots \quad R_0^{n-2} S(\mathbf{u}_{n-1}) d_{n-2}^m \quad R_0^{n-1} S(\mathbf{u}_n) d_{n-1}^m] \quad (12.19)$$

Teniendo en cuenta que  $RS(a)b = S(Ra)Rb$ , la expresión dada por 12.11b, y que  $S(a)b = a \times b$ , se obtiene la representación habitual del **Jacobiano de velocidad lineal y de velocidad angular**, [1],

$$J_v(q) = [\tilde{\mathbf{u}}_0 \times d(n, 0) \quad \tilde{\mathbf{u}}_1 \times d(n, 1) \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{u}}_{n-2} \times d(n, n-2) \quad \tilde{\mathbf{u}}_{n-1} \times d(n, n-1)] \quad (12.20a)$$

$$J_w(q) = [\tilde{\mathbf{u}}_0 \quad \tilde{\mathbf{u}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{u}}_{n-2} \quad \tilde{\mathbf{u}}_{n-1}] \quad (12.20b)$$

donde, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i-1} = R_0^{i-1} \mathbf{u}_i \quad (12.21a)$$

$$d(n, i-1) = d_0^n - d_0^{i-1} \quad (12.21b)$$

con  $d_0^0 = 0$  y  $R_0^0 = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad.

El conjunto de ejes de rotación de cada pieza,  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5, \mathbf{u}_6\}$  del robot en estudio, de la Figura 3.1 es el siguiente,

$$\mathcal{U} = \{z_0, -y_1, -y_2, x_3, y_4, x_5\} \quad (12.22)$$

donde  $z_0 = z$ .

A partir de esta definición y las ecuaciones recursivas de la cinemática directa 3.11 y 3.12, puede obtenerse sin dificultad el Jacobiano del robot en estudio. En la Sección 14 se desarrolla un ejemplo en el que se obtiene el Jacobiano de un robot plano de dos grados de libertad, utilizando las expresiones generales obtenidas aquí.

Nos va a interesar escribir el Jacobiano del robot en la forma de bloques de matrices cuadradas de orden tres, siguiente

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (12.23)$$

En los Apéndices D, E y F se obtienen la sumatrices  $J_{12}$ ,  $J_{21}$  y  $J_{22}$  respectivamente, del robot en estudio.

### 13. Cinemática Inversa de velocidad y aceleración

Definiremos el **problema cinemático inverso de velocidad y aceleración** como la obtención de las coordenadas generalizadas  $\dot{q}$  y  $\ddot{q}$  a partir de las coordenadas cartesianas de posición, orientación, velocidad lineal y angular y aceleración lineal y angular del extremo del robot.

El Jacobiano del robot obtenido en la Sección 12, facilita la resolución del problema cinemático inverso de velocidad y aceleración.

Repetimos aquí la ecuación de la cinemática directa de velocidad 12.4,

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \quad (13.1)$$

Derivando con respecto al tiempo, se obtiene la ecuación de la **cinemática directa de aceleración**,

$$\ddot{X} = J(q)\ddot{q} + \left(\frac{d}{dt}J(q)\right)\dot{q} \quad (13.2)$$

El **problema cinemático inverso de velocidad** consiste en obtener  $\dot{q}$ . Para ello es suficiente con invertir la relación 13.1,

$$\dot{q} = J(q)^{-1}\dot{X} \quad (13.3)$$

El problema que surge, en este punto, es que el jacobiano del robot puede no ser invertible, ya sea porque no sea una matriz cuadrada o porque su determinante sea nulo.

Para el robot que se está estudiando en este escrito,  $J(q)$  es una matriz cuadrada de orden 6, por lo que solo puede darse el caso en que  $\det(J(q)) = 0$ . A las configuraciones del robot que hacen  $\det(J(q)) = 0$  las llamaremos **singularidades**.

El **problema cinemático inverso de aceleración** consiste en obtener  $\ddot{q}$ . Para ello es suficiente con invertir la relación 13.2, lo cual supone también, invertir el jacobiano del robot,

$$\ddot{q} = J(q)^{-1} \left( \ddot{X} - \left(\frac{d}{dt}J(q)\right)\dot{q} \right) \quad (13.4)$$

Podemos apreciar que para poder resolver el problema cinemático inverso de velocidad, es necesario haber resuelto el problema cinemático inverso de posición y orientación. Y para poder resolver el problema cinemático inverso de aceleración, es necesario además haber resuelto el problema cinemático inverso de velocidad.

## 14. Ejemplo del Problema Cinemático Inverso de velocidad: comentarios sobre las singularidades

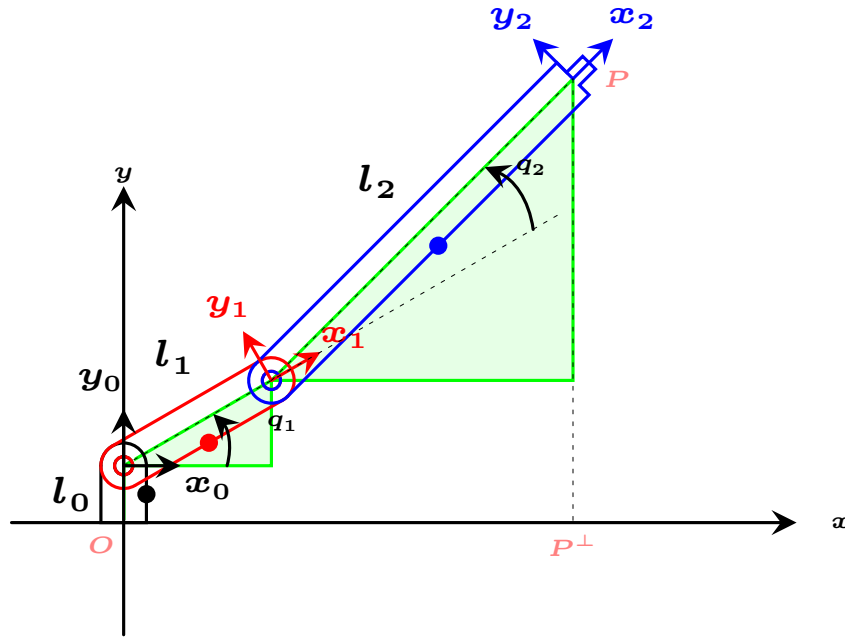


Figura 14.1: Mecanismo plano de dos grados de libertad

En esta Sección se desarrolla un ejemplo de resolución del problema cinemático de velocidad para un robot plano de dos grados de libertad  $n = 2$ , como el que se muestra en la Figura 14.1. La matriz jacobiana,  $J(q)$ , será de una matriz rectangular de dimensión  $[6 \times 2]$ , por lo que no podrá resolverse invirtiendo esta matriz.

Sin embargo, podrá resolverse descomponiendo la matriz en dos submatrices:

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix} \quad (14.1)$$

Para resolver el problema cinemático inverso de velocidad se suponen conocidas la velocidad lineal,  $\dot{X}_v$  y la velocidad angular,  $\dot{X}_w$ , deseadas del extremo  $P$  del robot. Vamos a ver que solo es posible resolver unívocamente este problema si tan solo se supone conocido  $\dot{X}_v$ .

Puesto que  $\dot{X} = J(q)\dot{q}$  se cumplirá que,

$$\dot{X}_v = J_v \dot{q} \quad (14.2a)$$

$$\dot{X}_w = J_w \dot{q} \quad (14.2b)$$

donde

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (14.3)$$

En la Sección 12 se obtuvo una expresión general del Jacobiano de los robots con articulaciones rotacionales. Para este ejemplo,

$$J_v(q) = [\tilde{u}_0 \times d(2,0) \quad \tilde{u}_1 \times d(2,1)] \quad (14.4a)$$

$$J_w(q) = [\tilde{u}_0 \quad \tilde{u}_1] \quad (14.4b)$$

donde, para  $i = 1, 2$ ,

$$\tilde{u}_{i-1} = R_0^{i-1} u_i \quad (14.5a)$$

$$d(2, i-1) = d_0^2 - d_0^{i-1} \quad (14.5b)$$

con  $d_0^0 = 0$  y  $R_0^0 = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad.

Definimos los siguientes conjuntos de vectores de rotación  $\mathcal{U}$  y de orígenes de los sistemas de referencia locales  $\tilde{\mathcal{O}}$  en su posición relativa nula,

$$\mathcal{U} = \{z_0, z_1\} \quad (14.6a)$$

$$\tilde{\mathcal{O}} = \{l_0y, l_1x_0, l_2x_1\} \quad (14.6b)$$

Entonces, el Jacobiano puede escribirse en la forma

$$J_v(q) = [\mathbf{k} \times d_0^2 \quad (R_0^1 \mathbf{k}) \times (d_0^2 - d_0^1)] \quad (14.7a)$$

$$J_w(q) = [\mathbf{k} \quad R_0^1 \mathbf{k}] \quad (14.7b)$$

En primer lugar calculamos  $J_w$ . Como  $R_0^1 = R_{z,q_1}$ ,

$$J_w(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.8)$$

Entonces, las coordenadas de la velocidad angular del punto  $P$ , expresadas en el sistema de referencia  $\mathcal{S}_O$ , vendrán dada por las relaciones siguientes:

$$\dot{X}_{wx} = 0 \quad (14.9a)$$

$$\dot{X}_{wy} = 0 \quad (14.9b)$$

$$\dot{X}_{wz} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \quad (14.9c)$$

Puede verse que no es posible imponer cualquier orientación  $\dot{X}_w$  al robot. Incluso imponiendo solo la coordenada  $z$ , existirá una dependencia entre  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$ . Como consecuencia, no podrá, en este caso, imponerse cualquier valor de  $\dot{X}_v$ .

Nos centraremos, ahora, en  $J_v$ . Para ello utilizaremos la relación siguiente,

$$d_0^2 = d_0^1 + R_0^1 d_1^2 \quad (14.10)$$

$$(14.11)$$

donde

$$d_0^1 = R_0^1 \tilde{o}_1 = l_1 R_{z,q_1} \mathbf{i} \quad (14.12a)$$

$$d_1^2 = R_1^2 \tilde{o}_2 = l_2 R_{z,q_2} \mathbf{i} \quad (14.12b)$$

Puesto que,

$$\mathbf{k} \times R_0^1 b = R_0^1 (((R_0^1)^T \mathbf{k}) \times b) = R_0^1 (\mathbf{k} \times b) \quad (14.13)$$

$$R_{z,\theta_1} R_{z,\theta_2} = R_{z,\theta_1+\theta_2} \quad (14.14)$$

$$R_{z,\theta} \mathbf{z} = \mathbf{z} \quad (14.15)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (14.16)$$

se cumple que

$$J_v(q) = [(l_1 R_{z,q_1} + l_2 R_{z,q_1+q_2}) \mathbf{j} \quad l_2 R_{z,q_1+q_2} \mathbf{j}] \quad (14.17)$$

Haciendo las operaciones,

$$J_v(q) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin (q_1 + q_2) & -l_2 \sin (q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos (q_1 + q_2) & l_2 \cos (q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14.18)$$

Podemos apreciar que  $J_{vz} = 0$  como era de esperar, por lo que podemos expresar el jacobiano de velocidad del robot plano de dos grados de libertad, como una matriz cuadrada de orden dos,

$$J_v(q) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin (q_1 + q_2) & -l_2 \sin (q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_2 \cos (q_1 + q_2) & l_2 \cos (q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (14.19)$$

El determinante es

$$\det(J_v) = l_1 l_2 \sin q_2 \quad (14.20)$$

En consecuencia, se producirá una singularidad cuando  $q_2 = 0$  o  $q_2 = \pi$ .

Invirtiendo el Jacobiano de velocidad se obtienen las velocidades de las coordenadas generalizadas,  $\dot{q}$ ,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 \sin q_2} \begin{bmatrix} l_2 \cos (q_1 + q_2) & l_2 \sin (q_1 + q_2) \\ -l_1 \cos q_1 - l_2 \cos (q_1 + q_2) & -l_1 \sin q_1 - l_2 \sin (q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_{vx} \\ \dot{X}_{vy} \end{bmatrix} \quad (14.21)$$

Una importante conclusión es que cuando la configuración del robot está próxima a las singularidades,  $\sin q_2 = 0$ , las velocidades de las coordenadas generalizadas crecen hasta hacerse infinitas en ellas.

Por último, teniendo en cuenta la relación 14.9c,  $\dot{X}_{wz} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$ , se obtiene una ecuación que relaciona velocidad lineal y angular del punto extremo del robot  $P$ ,

$$l_2 \dot{X}_{wz} \sin q_2 + \dot{X}_{vx} \cos q_1 + \dot{X}_{vy} \sin q_1 = 0 \quad (14.22)$$

Se aprecia, con esta última relación, que en las singularidades, existirá una relación entre  $\dot{X}_{vx}$  y  $\dot{X}_{vy}$ .

## A. Operaciones vectoriales y con matrices de rotación

**Definición A.1** (Matriz ortogonal  $R$ ). Una matriz cuadrada ortogonal  $R$  es una matriz cuyas filas y columnas forman una base ortonormal de un espacio euclídeo, es decir, son de modulo unidad y ortogonales entre sí.

La inversa de una matriz ortogonal es su traspuesta,

$$R^T R = I \quad (\text{A.1})$$

donde  $I$  es la matriz identidad, y la  $R^T$  es la traspuesta de la matriz  $R$ .

El determinante de una matriz ortogonal es  $\det(R) = 1$  o  $\det(R) = -1$ , pero no toda matriz de determinante 1 o  $-1$  es una matriz ortogonal.

**Definición A.2** (Matrices de rotación elementales  $R_x, R_y, R_z$ ). Las matrices de rotación  $R \in SO(n)$ , donde el conjunto  $SO(n)$  es el grupo ortogonal especial de dimensión  $n$ , es decir, es el conjunto de matrices ortogonales de orden  $n$ . En general, la dimensión de  $SO(n)$  es  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

El grupo  $SO(3)$  es de dimensión 3, lo que significa que siempre es posible transformar un sistema de referencia cualquiera en otro mediante una secuencia consecutiva de tres rotaciones alrededor de un único eje (rotaciones elementales).

El grupo  $SO(2)$  es de dimensión 1, lo que significa que siempre es posible transformar un sistema de referencia cualquiera en otro mediante una única rotación alrededor de un único eje.

Llamaremos matrices de rotación elementales  $R \in SO(3)$  alrededor de los ejes  $x, y$  o  $z$  respectivamente, a las siguientes matrices:

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.2a})$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.2b})$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2c})$$

La matriz de rotación elemental  $R \in SO(2)$ , es la siguiente,

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

**Proposición A.3** (Composición de rotaciones). Escribiremos  $R_i^j$  como la matriz de rotación del sistema de referencia  $S_j$  respecto a  $S_i$ .

Dadas dos matrices de rotación  $R_i^k$  y  $R_k^j$  y los sistemas de referencia  $S_i, S_j$  y  $S_k$  cualesquiera, se cumple que

$$R_i^j = R_i^k R_k^j \quad (\text{A.4})$$

Por ejemplo,  $R_0^3$  puede ser escrito siguiendo una regla de la cadena, como

$$R_0^3 = R_0^1 R_1^2 R_2^3 \quad (\text{A.5})$$

**Proposición A.4** (Coordenadas de un punto en dos sistemas de referencia). Sea un punto  $P$  cualquiera, fijo en el espacio, cuyas coordenadas en el sistema de referencia  $S_i$  es el vector  $p_i$ . Y sea  $R_i^j$  la matriz de rotación del sistema de referencia  $S_j$  respecto a  $S_i$ . Entonces se cumple que

$$p_i = R_i^j p_j \quad (\text{A.6})$$

Por ejemplo, si  $R_i^j$  es la matriz elemental  $R_\theta \in SO(2)$ , entonces, si  $p_j = (\cos \theta, -\sin \theta)^T$ , se cumple que  $p_i = (1, 0)^T$ . Puede verse que  $p_j = (R_i^j)^T p_i = R_j^i p_i$ .



**Proposición A.5** (Matriz antisimétrica  $S$ ). *Dados dos vectores  $a, b \in \mathbb{R}^3$ , existe una única matriz antisimétrica  $S(a)$  tal que*

$$a \times b = S(a)b \quad (\text{A.7})$$

donde  $\times$  representa el producto vectorial y

$$S(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Las matrices antisimétricas  $S$  satisfacen la condición  $S + S^T = O$ .

**Proposición A.6.** *Puesto que  $a \times b = -b \times a$  se cumple que*

$$a \times b = -S(b)a \quad (\text{A.9})$$

**Proposición A.7.** *Para cualquier matriz de rotación  $R \in SO(3)$*

$$R(a \times b) = (Ra) \times (Rb) = S(Ra)Rb = -S(Rb)Ra \quad (\text{A.10})$$

**Proposición A.8.** *Para cualquier matriz de rotación  $R \in SO(3)$*

$$S(Ra)Rb = RS(a)b \quad (\text{A.11})$$

**Proposición A.9.** *Haciendo  $c = Rb$  en A.11, se cumple que, para cualquier matriz de rotación  $R \in SO(3)$ ,*

$$RS(a)R^T c = S(Ra)c \quad (\text{A.12})$$

**Proposición A.10.** *Como  $R^T R = I$  se puede escribir el cuadrado de la norma euclídea del vector  $a$  como*

$$a \cdot a = a^T a = a^T R^T R a = (Ra)^T (Ra) = (Ra) \cdot (Ra) \quad (\text{A.13})$$

donde  $\cdot$  el producto escalar.

*Esto indica que la norma es invariante a las rotaciones.*

*En general se cumple que*

$$a \cdot b = (Ra) \cdot (Rb) \quad (\text{A.14})$$

donde  $R$  es una matriz ortogonal.

**Proposición A.11.**

$$a \cdot b = \text{tr}(ab^T) = \frac{1}{2} \text{tr}[S(a)^T S(b)] \quad (\text{A.15})$$

donde  $\text{tr}[A]$  representa la traza de la matriz  $A$ .

Se denomina norma de Frobenius de la matriz  $A$  a  $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}[AA^T]}$ .

**Proposición A.12.** *Dada una matriz de rotación  $R(t)$  se cumple*

$$\dot{R}(t) = S(w(t))R(t) \quad (\text{A.16})$$

donde  $w(t)$  representa el vector de velocidad angular y a la matriz antisimétrica  $S(w(t))$  de la forma A.8 se le denomina tensor de velocidad angular.

*Demostración de la Proposición A.12.* Sabemos que  $R^T R = RR^T = I$ .

Puede hacerse

$$\dot{R}(t) = \dot{R}(t)R^T R \quad (\text{A.17})$$

Vamos a demostrar que  $S = \dot{R}(t)R^T$  es una matriz antisimétrica.

Derivando la expresión  $RR^T = I$ ,

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = O \quad (\text{A.18})$$

es decir que  $S + S^T = O$ , por lo que  $S$  es antisimétrica.  $\square$

## B. Función $atan2(y, x)$

En lo que sigue se obtendrán los ángulos siempre definidos entre  $[-\pi, \pi]$ . Para ello no conviene utilizar las funciones inversas arcoseno, arcocoseno o arcotangente, sino la función computacional  $atan2$  ya que toma en consideración los signos de los senos y cosenos en los diferentes cuadrantes de la circunferencia goniométrica.

La función  $atan2(y, x)$  se define utilizando la función arcotangente que toma valores entre  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , de la siguiente forma

$$atan2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & , x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & , x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & , x < 0 \wedge y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & , x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , x = 0 \wedge y < 0 \\ \text{indefinida} & , x = 0 \wedge y = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

## C. Obtención de las soluciones al Problema Cinemático Inverso de Posición

En este Apéndice se obtienen las soluciones del problema cinemático inverso de posición conocido el centro de la muñeca  $C$  del Mecanismo de cuatro grados de libertad de la Figura C.1.

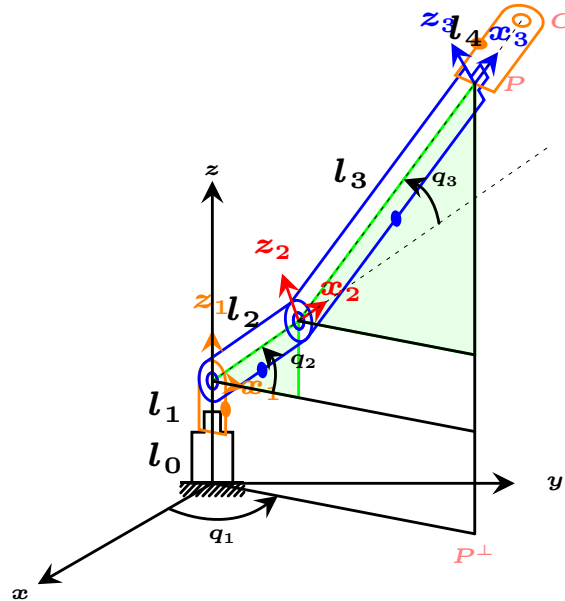


Figura C.1: Mecanismo de cuatro grados de libertad

Supondremos que los ejes de rotación del brazo son  $\{z_0, -y_1, -y_2, x_3\}$ . De esta manera, al ser  $x_3$  el eje de rotación de la cuarta pieza, el mecanismo es equivalente, desde el punto de vista de la resolución del problema cinemático inverso de posición, a otro de tres grados de libertad, en el que la longitud de la última pieza sea  $l_3 + l_4$ . Es decir, su rotación alrededor de  $x_3$  no afecta a la resolución de este problema.

Puesto que el eje de rotación de la primera pieza es  $z_0$ , la obtención de  $q_1$  es inmediata,

$$q_1 = atan2(C_y, C_x) \quad (\text{C.1})$$

Para obtener  $q_2$  y  $q_3$  será necesario resolver un sistema de dos ecuaciones trigonométricas,

$$C_{x'} = l_2 \cos q_2 + (l_3 + l_4) \cos (q_2 + q_3) \quad (\text{C.2a})$$

$$C_{z'} = l_2 \sin q_2 + (l_3 + l_4) \sin (q_2 + q_3) \quad (\text{C.2b})$$

donde

$$C_x = C_{x'} \cos q_1 \quad (\text{C.3a})$$

$$C_y = C_{x'} \sin q_1 \quad (\text{C.3b})$$

$$C_z = C_{z'} + l_0 + l_1 \quad (\text{C.3c})$$

De las relaciones **C.3a** y **C.3b** puede obtenerse de manera única el valor de  $C_{x'}$ ,

$$C_{x'} = C_x \cos q_1 + C_y \sin q_1 \quad (\text{C.4})$$

El sistema de ecuaciones trigonométricas dado por **C.2** tiene dos soluciones que pueden obtenerse haciendo

$$(C_{x'} - l_2 \cos q_2)^2 + (C_{z'} - l_2 \sin q_2)^2 = (l_3 + l_4)^2 \quad (\text{C.5})$$

Desarrollando y simplificando la relación **C.5** se obtiene,

$$C_{x'} \cos q_2 + C_{z'} \sin q_2 = \frac{l_2^2 + C_{x'}^2 + C_{z'}^2 - (l_3 + l_4)^2}{2l_2} \quad (\text{C.6})$$

Para la resolución de la ecuación **C.6** puede tenerse en cuenta la expresión del seno de la suma de ángulos, por lo que puede hacerse lo siguiente,

$$\sin (q_2 + \beta) = \frac{l_2^2 + C_{x'}^2 + C_{z'}^2 - (l_3 + l_4)^2}{2l_2 \sqrt{(C_{x'}^2 + C_{z'}^2)}} \quad (\text{C.7})$$

donde

$$\sin \beta = \frac{C_{x'}}{\sqrt{(C_{x'}^2 + C_{z'}^2)}} \quad (\text{C.8a})$$

$$\cos \beta = \frac{C_{z'}}{\sqrt{(C_{x'}^2 + C_{z'}^2)}} \quad (\text{C.8b})$$

o escrito en la forma computacional,

$$q_2 = -\beta + \text{atan2} \left( L, \pm \sqrt{(1 - L^2)} \right) \quad (\text{C.9})$$

donde

$$\beta = \text{atan2} (C_{x'}, C_{z'}) \quad (\text{C.10a})$$

$$L = \frac{l_2^2 + C_{x'}^2 + C_{z'}^2 - (l_3 + l_4)^2}{2l_2 \sqrt{(C_{x'}^2 + C_{z'}^2)}} \quad (\text{C.10b})$$

Para la obtención de  $q_3$  basta con resolver el sistema de ecuaciones dado por **C.2**, conocida  $q_2$ . Es decir,

$$q_3 = -q_2 + \text{atan2} (C_{z'} - l_2 \sin q_2, C_{x'} - l_2 \cos q_2) \quad (\text{C.11})$$

Podemos observar en la relación **C.9** que el problema cinemático inverso de posición tiene dos posibles soluciones.

Puede darse alguna situación singular cuando  $C_x = C_y = 0$ , ya que no se podrá aplicar la relación **C.1**. En este caso  $q_1$  puede tomar cualquier valor. De la relación **C.4** puede comprobarse que, en este caso,  $C_{x'} = 0$ , y viceversa, si  $C_{x'} = 0$  entonces  $C_x = C_y = 0$ . Además si  $C_{x'} = 0$ , entonces  $\sin \beta = 0$

por lo que  $\beta = 0$  o  $\beta = \pi$  obteniéndose dos posibles soluciones para  $q_2$ , a partir de la relación C.7, es decir,  $\sin q_2 = \pm L$ . También  $\cos \beta = \pm 1$ , lo que implica que  $C_{z'} = \pm 1$ .

También puede darse el caso en que  $C_{x'} = C_{z'} = 0$ , no pudiéndose obtener  $\beta$ , a partir de la relación C.10a. En este caso se deberá cumplir que  $l_2 = l_3 + l_4$ , como puede comprobarse a partir de la relación C.5. Esta singularidad se resuelve de manera sencilla a partir de las ecuaciones C.2, que tendrán la forma,

$$0 = l_2 \cos q_2 + (l_3 + l_4) \cos (q_2 + q_3) \quad (\text{C.12a})$$

$$0 = l_2 \sin q_2 + (l_3 + l_4) \sin (q_2 + q_3) \quad (\text{C.12b})$$

Multiplicando la ecuación C.12a por el  $\sin q_2$  y la ecuación C.12b por el  $\cos q_2$  y restando se obtiene  $\sin q_3 = 0$ , por lo que  $q_3 = 0$  o  $q_3 = \pi$ . Pero  $q_3 = 0$  no satisface las ecuaciones C.12, mientras que  $q_3 = \pi$  si las cumple para cualquier valor de  $q_2$ .

Sin embargo, cuando  $l_2 = l_3 + l_4$  no es necesario que ocurra que  $C_{x'} = C_{z'} = 0$ . Si  $C_{x'} \neq 0$  o  $C_{z'} \neq 0$  no se presentaría esta singularidad, y  $\beta$  podría obtenerse de manera única. Por lo tanto, si no se produce la primera singularidad  $C_x = C_y = 0$  tampoco se producirá esta segunda. Pero, si se produce la primera, y además  $C_z = l_0 + l_1$ , se producirá la segunda. Desde un punto de vista de diseño del robot convendrá que  $l_2 \neq l_3 + l_4$ , evitándose siempre esta singularidad.

Y por último, también puede ocurrir que  $C_{x'} = l_2 \cos q_2$  y  $C_{z'} = l_2 \sin q_2$  no pudiéndose obtener  $q_2$  a partir de la relación C.11. En esta caso  $l_2 = \sqrt{(C_{x'}^2 + C_{z'}^2)}$ . Además, teniendo en cuenta la relación C.5, también deberá cumplirse que  $l_3 + l_4 = 0$ , lo que es imposible, salvo que  $l_3 = l_4 = 0$ . Por lo tanto, esta singularidad no puede producirse (ya que, al menos, suponemos que  $l_3 > 0$ , aunque pueda considerarse el robot con  $l_4 = 0$  sin pérdida de generalidad), lo que implica que siempre será posible obtener  $q_3$  dado  $q_2$  utilizando la relación C.11.

En resumen, si se hace  $l_2 \neq l_3 + l_4$ , solo puede darse la primera singularidad.

Resumiendo todo lo anterior, y suponiendo que  $l_2 \neq l_3 + l_4$ , el problema cinemático inverso de posición tiene las siguientes soluciones:

$$q_1 = \begin{cases} \text{atan2}(C_y, C_x) & C_x \neq 0 \vee C_y \neq 0 \\ \mathbb{R} & C_x = C_y = 0 \end{cases} \quad (\text{C.13a})$$

$$q_2 = -\beta + \text{atan2}\left(L, \pm \sqrt{(1 - L^2)}\right) \quad (\text{C.13b})$$

$$q_3 = -q_2 + \text{atan2}(C_{z'} - l_2 \sin q_2, C_{x'} - l_2 \cos q_2) \quad (\text{C.13c})$$

donde

$$\beta = \text{atan2}(C_{z'}, C_{x'}) \quad (\text{C.14a})$$

$$L = \frac{l_2^2 + C_{x'}^2 + C_{z'}^2 - (l_3 + l_4)^2}{2l_2 \sqrt{(C_{x'}^2 + C_{z'}^2)}} \quad (\text{C.14b})$$

$$C_{x'} = C_x \cos q_1 + C_y \sin q_1 \quad (\text{C.14c})$$

$$C_{z'} = C_z - (l_0 + l_1) \quad (\text{C.14d})$$

## D. Obtención de $J_{12}(q)$ y $\det(J_{12})$

La submatriz  $J_{12}$  del Jacobiano del robot deducido en la Sección 12 tiene la forma,

$$J_{12} = [R_0^3 S(\mathbf{u}_4) d_3^6 \quad R_0^4 S(\mathbf{u}_5) d_4^6 \quad R_0^5 S(\mathbf{u}_6) d_5^6] \quad (\text{D.1})$$

donde

$$\mathbf{u}_4 = x_3 = \mathbf{i} \quad (\text{D.2a})$$

$$\mathbf{u}_5 = y_4 = \mathbf{j} \quad (\text{D.2b})$$

$$\mathbf{u}_6 = x_5 = \mathbf{i} \quad (\text{D.2c})$$

y para cualquier vector  $\mathbf{u}$ ,

$$S(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

En la Sección 3 se demostró la ecuación 3.6, es decir, que para  $i = 1, 2, \dots, 6$ ,

$$d_{i-1}^i = R_{i-1}^i \tilde{\mathbf{o}}_i \quad (\text{D.4})$$

donde

$$\tilde{\mathbf{o}}_4 = l_4 x_6 = l_4 \mathbf{i} \quad (\text{D.5a})$$

$$\tilde{\mathbf{o}}_5 = l_5 x_4 = l_5 \mathbf{i} \quad (\text{D.5b})$$

$$\tilde{\mathbf{o}}_6 = l_6 x_6 = l_6 \mathbf{i} \quad (\text{D.5c})$$

y

$$R_5^6 = R_{x,q_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_6 & -\sin q_6 \\ 0 & \sin q_6 & \cos q_6 \end{bmatrix} \quad (\text{D.6a})$$

$$R_4^5 = R_{y,q_5} = \begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \sin q_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_5 & 0 & \cos q_5 \end{bmatrix} \quad (\text{D.6b})$$

$$R_3^4 = R_{x,q_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 \\ 0 & \sin q_4 & \cos q_4 \end{bmatrix} \quad (\text{D.6c})$$

Utilizando la regla de la cadena de la composición de rotaciones, puede expresarse  $J_{12}$  en la forma,

$$J_{12} = R_0^3 [S(\mathbf{u}_4)d_3^6 \quad R_3^4 S(\mathbf{u}_5)d_4^6 \quad R_3^5 S(\mathbf{u}_6)d_5^6] \quad (\text{D.7})$$

Por lo tanto,

$$S(\mathbf{u}_6)d_5^6 = l_6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_6 & -\sin q_6 \\ 0 & \sin q_6 & \cos q_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = l_6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

De aquí se deduce que el determinante de  $J_{12}$  debe ser nulo,

$$\boxed{\det(J_{12}) = 0} \quad (\text{D.9})$$

En la Sección 3 se demostró la ecuación 3.13a, por lo que

$$d_4^6 = d_4^5 + R_4^5 d_5^6 = l_5 R_4^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + l_6 R_4^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (l_5 + l_6) \begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \sin q_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_5 & 0 & \cos q_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

De aquí que,

$$R_3^4 S(\mathbf{u}_5)d_4^6 = (l_5 + l_6) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 \\ 0 & \sin q_4 & \cos q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_5 \\ 0 \\ -\sin q_5 \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

$$= -(l_5 + l_6) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 \\ 0 & \sin q_4 & \cos q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin q_5 \\ 0 \\ \cos q_5 \end{bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

Por lo tanto,

$$R_3^4 S(\mathbf{u}_5) d_4^6 = (l_5 + l_6) \begin{bmatrix} -\sin q_5 \\ \sin q_4 \cos q_5 \\ -\cos q_4 \cos q_5 \end{bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

Por último, en la Sección 3 se demostró la ecuación 3.13a, por lo que

$$d_3^6 = d_3^5 + R_3^5 d_5^6 \quad (\text{D.14a})$$

$$d_3^5 = d_3^4 + R_3^4 d_4^5 = d_3^4 + R_3^5 \tilde{o}_5 \quad (\text{D.14b})$$

De aquí que

$$d_3^6 = d_3^4 + R_3^5 (d_5^6 + \tilde{o}_5) = d_3^4 + R_3^5 (\tilde{o}_6 + \tilde{o}_5) = d_3^4 + (l_5 + l_6) R_3^5 \mathbf{i} \quad (\text{D.15})$$

ya que  $d_5^6 = R_5^6 \tilde{o}_6 = \tilde{o}_6$ .

Teniendo en cuenta que  $d_3^4 = R_3^4 \tilde{o}_4$  y que  $R_3^5 = R_3^4 R_4^5$ ,

$$d_3^6 = R_3^4 \left( l_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (l_5 + l_6) \begin{bmatrix} \cos q_5 \\ 0 \\ -\sin q_5 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{D.16})$$

De aquí que,

$$S(\mathbf{u}_4) d_3^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin q_4 & -\cos q_4 \\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 \end{bmatrix} \left( l_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (l_5 + l_6) \begin{bmatrix} \cos q_5 \\ 0 \\ -\sin q_5 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{D.17})$$

que simplificando,

$$S(\mathbf{u}_4) d_3^6 = (l_5 + l_6) \begin{bmatrix} 0 \\ \cos q_4 \sin q_5 \\ \sin q_4 \sin q_5 \end{bmatrix} \quad (\text{D.18})$$

Resumiendo,

$$J_{12} = (l_5 + l_6) R_0^3 \begin{bmatrix} 0 & -\sin q_5 & 0 \\ \cos q_4 \sin q_5 & \sin q_4 \cos q_5 & 0 \\ \sin q_4 \sin q_5 & -\cos q_4 \cos q_5 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.19})$$

Puede observarse que la primera columna de  $J_{12}$  se hace nula cuando  $\sin q_5 = 0$ , es decir, cuando  $q_5 = 0$  o  $q_5 = \pi$ , y  $J_{12}$  adopta la forma

$$J_{12} = \pm (l_5 + l_6) R_0^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin q_4 & 0 \\ 0 & -\cos q_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.20})$$

## E. Obtención de $J_{21}(q)$ y $\det(J_{21})$

La submatriz  $J_{21}$  del Jacobiano del robot deducido en la Sección 12 tiene la forma,

$$J_{21} = [\mathbf{u}_1 \quad R_0^1 \mathbf{u}_2 \quad R_0^2 \mathbf{u}_3] \quad (\text{E.1})$$

donde  $R_0^2 = R_0^1 R_1^2$ , y

$$\mathbf{u}_1 = z_0 = \mathbf{k} \quad (\text{E.2a})$$

$$\mathbf{u}_2 = -y_1 = -\mathbf{j} \quad (\text{E.2b})$$

$$\mathbf{u}_3 = -y_2 = -\mathbf{j} \quad (\text{E.2c})$$

y

$$R_0^1 = R_{z,q_1} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3a})$$

$$R_1^2 = R_{-y,q_2} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{bmatrix} \quad (\text{E.3b})$$

Desarrollando los elementos de  $J_{21}$ ,

$$J_{21} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

donde  $s_i = \sin q_i$  y  $c_i = \cos q_i$ .

El determinante de  $J_{21}$  es,

$$\det(J_{21}) = 0 \quad (\text{E.5})$$

## F. Obtención de $J_{22}(q)$ y $\det(J_{22})$

La submatriz  $J_{22}$  del Jacobiano del robot deducido en la Sección 12 tiene la forma,

$$J_{22} = [R_0^3 \mathbf{u}_4 \quad R_0^4 \mathbf{u}_5 \quad R_0^5 \mathbf{u}_6] \quad (\text{F.1})$$

donde

$$\mathbf{u}_4 = x_3 = \mathbf{i} \quad (\text{F.2a})$$

$$\mathbf{u}_5 = y_4 = \mathbf{j} \quad (\text{F.2b})$$

$$\mathbf{u}_6 = x_5 = \mathbf{i} \quad (\text{F.2c})$$

Teniendo en cuenta la regla de la cadena de la composición de rotaciones,  $J_{22}$  puede ser escrita en la forma

$$J_{22} = R_0^3 [x_3 \quad R_3^4 y_4 \quad R_3^4 R_4^5 x_5] \quad (\text{F.3})$$

donde

$$R_3^4 = R_{x,q_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_4 & -\sin q_4 \\ 0 & \sin q_4 & \cos q_4 \end{bmatrix} \quad (\text{F.4a})$$

$$R_4^5 = R_{y,q_5} = \begin{bmatrix} \cos q_5 & 0 & \sin q_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_5 & 0 & \cos q_5 \end{bmatrix} \quad (\text{F.4b})$$

Desarrollando los elementos de  $J_{22}$ ,

$$J_{22} = R_0^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_5 \\ 0 & c_4 & s_4 s_5 \\ 0 & s_4 & -c_4 s_5 \end{bmatrix} \quad (\text{F.5})$$

donde  $s_i = \sin q_i$  y  $c_i = \cos q_i$ .

El determinante de  $J_{22}$  es,

$$\det(J_{22}) = -\sin q_5 \quad (\text{F.6})$$

ya que  $\det(R_0^3) = 1$  por ser una matriz de rotación.

Cuando  $\sin q_5 = 0$ , es decir, cuando  $q_5 = 0$  o  $q_5 = \pi$ , el determinante de  $J_{22}$  es nulo.

## **Bibliografia**

- [1] M. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics And Control*. John Wiley & Sons, Inc., 1989.